جامعة الفرات الأوسط التقنية

المعهد التقني الكوفة

قسم المكائن والمعدات فرع السيارات

منهج الرياضيات

المرحلة الاولـــى

مدرس المادة : سعد رزاق مجيد

$Matrices$ (المصفوفات)

$we\ difine\ the\ matrix\ (A) of\ degree\ (m,n) as\ aset\ of\ real\ numbers$

$and\ we\ arrange\ these\ number\ in\ rows\ (columus) in\ a\ rectangular\ farm$

$between\ two\ brackets\ [\quad]\ and\ we\ write\ them\ as\ follons$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \ldots\ldots, \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

$were\ [a_{ij}]\ are\ the\ elements\ of\ (A)$

$Example:-\ let\ A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$then\ (A)\ is\ metrix\ of\ degree\ (2 \times 3) and\ has\ two\ rows\ and\ three\ columns$

$a_{11} = 3, \quad a_{12} = 4, \quad a_{13} = 5, \quad a_{21} = 2, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -1$

$Example:-\ let\ B = [1 \quad 5 \quad 0 \quad -3]$ this is a $metrix\ of\ degree\ (1 \times 4)$

$Example:-\ let \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ this is a $metrix\ of\ degree\ (3 \times 1)$

$Example:-\ let\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ this is a zero $metrix\ of\ degree\ (2 \times 3)$

types of matrices :-

1) squre matrix :- $the\ matrix\ is\ called\ a$ squre matrix $if\ the\ degree\ (n \times n)$

2) Equal matrices: -

the matrices (A, B) is called equal matrices if and only if has same degree , and ($a_{ij} = b_{ij}$)

3) Diagonal matrix : − (المصفوفة القطرية)

A squre $matrix$ is $called$ a Diagonal matrix $if\, a_{ij} \neq o$ at $i = j$ and $(a_{ij} = 0$ $at\, i \neq j)$

$$Example:- \quad let\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ this is a Diagonal matrix of $degree$ (3×3)

$becaues$ $(a_{ij} \neq o \quad at\ i = j)$ and $(a_{ij} = 0 \quad at\ i \neq j)$

4) $scalar\ matrix$: −(المصفوفة القياسية)

A squre $matrix$ is $called$ a $scalar$ $matrix$ if $(a_{ij} = c \neq o$ at $i = j)$, $(a_{ij} = 0$ $at\, i \neq j)$

$$Example:- \quad let\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ this is a $scalar$ $matrix$ of $degree$ (2×2)

$becaues \quad a_{11} = a_{22} = 2\ \ at\ \ i = j \quad ,and \quad a_{12} = a_{21} = 0\ \ at\ i \neq j$

5) $Identity\ matrix$: −(المصفوفة المحايدة)

$Ascalar$ $matrix$ is $called$ $Identity$ $matrix$ if $a_{ij} = 1$ at $i = j$ and $(a_{ij} = 0$ $at\ i \neq j)$

$$Example:- \quad let\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ this is a $Identity$ $matrix$ of $degree$ (3×3)

$becaues \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1\ \ at\ \ i = j \quad ,and \quad a_{ij} = 0\ \ at\ i \neq j$

$operation\ on\ matrices$

$A)\ addition\ and\ subtraction:-$

$let\ \ A = [a_{ij}] \quad ,B = [b_{ij}]$ be two $matrices$ of the $same$ $degree$ $(m \times n)$ $then$

$1)\ A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ is $amatrix$ of the $degree$ $(m \times n)$

2) $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$ is amatrix of the degree $(m \times n)$

Example :- let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

Then $A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+2 & 1+5 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

and $A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-2 & 1-5 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

B) multiplication a matrix by a number (or constant) K , $KA = [Ka_{ij}]$

Example :- let $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $K = 3$

then $KA = 3A = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 15 \\ 12 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Example :- let $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $K = \frac{1}{2}$

then $KA = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 \\ 2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

C) commutative law (الخاصية التبديلية)

let $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ be two matrices of the same degree $(m \times n)$ then

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$

xample :- let $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Then $A + B = \begin{bmatrix} 3+(-2) & 1+0 & 5+4 \\ 2+5 & -3+(-3) & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 7 & -6 & 10 \end{bmatrix}$

$$and \quad B + A = \begin{bmatrix} -2+3 & 0+1 & 4+5 \\ 5+2 & -3+(-3) & 6+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 7 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

$and\ so\ A + B = B + A$

$Example:-\ let \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$then \quad A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-2 & 1-5 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$and \quad B - A = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 & 0-3 \\ 2-0 & 5-1 & -1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$and\ so\ A - B \neq B - A$ (is no commutative

d) *Addition law* (قانون التجميع)

let A, B, C be matrices of the same degree $(m \times n)$

then $A + (B + C) = (A + B) + C$

e) *Multiplication of Matrices* (ضرب المصفوفات)

let $A = [a_{ij}]$ be a matrix of degree $(m \times n)$

and $B = [b_{ij}]$ be a matrix of degree $(p \times z)$ then A can multiplied by B ,

that in AB is defined if and only if

the number of columns in A is equal to the number of rows in B

, ie $n = p$ the result of multiplication of AB is a matrix

$$C = [c_{ij}] = \sum_{K=1}^{N} a_{ik} b_{kj}$$

$$let \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad and \;\; B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

the number of columns in A are (3) *, the number of rows in B are* (3)

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{bmatrix}$$

$$let \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad and \;\; B = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(8) + 7(5) + 6(9) \\ 2(8) + 3(5) + 1(9) \\ 3(8) + 1(5) + 2(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121 \\ 40 \\ 47 \end{bmatrix}$$

$$xample :- \; let \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(3) + 2(-2) + (-1)(5) & 1(1) + 2(4) + (-1)(2) & 1(5) + 2(6) + (-1)(3) \\ 3(3) + 5(-2) + 4(5) & 3(1) + 5(4) + 4(2) & 3(5) + 5(6) + 4(3) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -6 & 7 & 14 \\ 19 & 31 & 57 \end{bmatrix}$$

Determinants (المحددات)

$$Example :- \; let \; A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2(5) - 4(3) = 10 - 12 = -2$$

$$Example : -let \;\; B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = 4(6-0) - 7(4-3) + 6(0-9) = 24 - 7 + 63 = 80$$

$$Example :- let \;\; C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = 3(24-2) - 1(20-3) + 0(10-18) = 66 - 17 + 0 = 49$$

System of linear Equations

$$a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

then the equations (1),(2)*and* (3) *form* (تكون)*a system of 3 linear equations*

we want solve these equations to find the intersection point (x, y, z)(نقاط التقاطع)

to do this we use the deferminonts to solve these equations as follows

$$let \;\; A = \begin{bmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{bmatrix} ,A_x = \begin{bmatrix} k1 & b1 & c1 \\ k2 & b2 & c2 \\ k3 & b3 & c3 \end{bmatrix} ,A_y = \begin{bmatrix} a1 & k1 & c1 \\ a2 & k2 & c2 \\ a3 & k3 & c3 \end{bmatrix} ,A_z = \begin{bmatrix} a1 & b1 & k1 \\ a2 & b2 & k2 \\ a3 & b3 & k3 \end{bmatrix}$$

$$Then \qquad x = \frac{A_x}{A} \quad , \quad y = \frac{A_y}{A} \quad ,z = \frac{A_z}{A}$$

Example : solve the following linear Equation by usind the determinants and check your result

1) $x + y + z = 2$, 2) $2x - 2y + z = 0$, 3) $x + 2y - z = 4$

Solution: −

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1(1-2) - 1(-2-1) + 1(4+1) = 7$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 2(1-2) - 1(0-4) + 1(0+4) = 6$$

$$Ay=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&1\\1&4&-1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}0&1\\4&-1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}2&0\\1&4\end{bmatrix}=1(-4)-2(-2-1)+1(8-0)=10$$

$$Az=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}-1&0\\2&4\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}2&0\\1&4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}=1(-4-0)-1(8-0)+2(4+1)=-2$$

$$\therefore\ x=\frac{A_x}{A}=\frac{6}{7}=0.857\ ,\quad y=\frac{A_y}{A}=\frac{10}{7}=1.445\quad ,z=\frac{A_z}{A}=\frac{-2}{7}=-0.2857$$

athear method

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\\1&2\end{bmatrix}=1+1+4-(-1+2-2)=7$$

$$Ax=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&1\\4&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&1\\4&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&-1\\4&2\end{bmatrix}=2+4+0—(-4+4-0)=6$$

$$Ay=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&1\\1&4&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&1\\1&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&0\\1&4\end{bmatrix}=0+2+8-(0+4-4)=10$$

$$Az=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\\1&2\end{bmatrix}=-4+0+8-(-2+0+8)=-2$$

$$\therefore\ x=\frac{A_x}{A}=\frac{6}{7}=0.857\ ,\quad y=\frac{A_y}{A}=\frac{10}{7}=1.445\quad ,z=\frac{A_z}{A}=\frac{-2}{7}=-0.2857$$

Example : solve the following linear Equation by usind the determinants and check your result

1) $2x-3y+6z=-5$, 2) $4x+2y-3z=15$, 3) $2x-4y+10z=-6$

Solution: –

$$A=\begin{bmatrix}2&-3&6\\4&2&-3\\2&-4&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&6\\4&2&-3\\2&-4&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\4&2\\2&-4\end{bmatrix}=40+18-96—(24+24-120)=34$$

$$Ax = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 6 \\ 15 & 2 & -3 \\ -6 & -4 & 10 \end{bmatrix} = -5\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} - (-3)\begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$Ax = -5(20-12) + 3(150-18) + 6(-60+12) = -40 + 396 - 288 = 68$$

$$Ay = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 4 & 15 & -3 \\ 2 & -6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 4 & 15 & -3 \\ 2 & -6 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 15 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = 300 + 30 - 144 - (180 + 36 - 200) = 170$$

$$Az = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 15 \\ 2 & -4 & -6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & 15 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} - (-3)\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} + (-5)\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$Az = 2(-12+60) + 3(-24-30) - 5(-16-4) = 96 - 162 + 100 = 34$$

$$\therefore\ x = \frac{A_x}{A} = \frac{68}{34} = 2 \quad , \quad y = \frac{A_y}{A} = \frac{170}{34} = 5 \quad , z = \frac{A_z}{A} = \frac{34}{34} = 1$$

$proplam : solve\ the\ following\ linear\ Equation$

1) $x - 2y - 4z = -26$, 2) $2x + 3y - 3z = -6$ 3) $4x + 2y - 3Z = -9$

Solution: –

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -9 + 24 - 16 — (-48 - 6 + 12) = 41$$

$$Ax = \begin{bmatrix} -26 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & -3 \\ -9 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & -3 \\ -9 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -26 & -2 \\ -6 & 3 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} = 228 - 228 = 0$$

$$Ay = \begin{bmatrix} 1 & -26 & -4 \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & -9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -26 & -4 \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & -9 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -26 \\ 2 & -6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} = 18 + 312 + 72 - (96 + 27 + 156) = 123$$

$$x = \frac{A_x}{A} = \frac{0}{41} = 0 \quad , \quad y = \frac{Ay}{41} = \frac{123}{41} = 3$$

proplam : solve the following linear Equation

1) $x+2y+3z=11$, 2) $3x-2y-2z=3$, 3) $2x+3y+2z=13$

1) $x+2y+3z=-6$, 2) $3x-2y-2z=12$, 3) $x+y+z=-1$

1) $2x+4y+2z=-2$, 2) $5x-5y-5z=-15$, 3) $3x+2y+3z=-3$

1) $x-2y-4z=-26$, 2) $2x+3y-3z=-6$, 3) $4x+2y-3z=-9$

Complex numbers (الاعداد المركبة)

العدد المركب :- هو زوج مرتب من مركبتين حقيقية وتخيلية ويكتب بالصيغة العامة التالية

$z = ax + byi$ ... حيث $(i) = \sqrt{-1}$, $ax =$ الجزء الحقيقي . $byi =$ الجزء التخيلي

$y = i^n$

عندما n تقبل القسمة على 4 بدون باقي فان $i^n = 1$

عندما n تقبل القسمة على 4 والباقي 2 فان $i^n = -1$

عندما n تقبل القسمة على 4 والباقي 1 فان $i^n = i$

عندما n تقبل القسمة على 4 والباقي 3 فان $i^n = -i$

Exercise for complex numbers

1) *let* $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 4 + 3i$

find a) $z_1 + 3z_2$ b) $z_1 - 4z_3$ c) $z_1 . z_2$

d) $(z_1 + z_2)^2$ e) $\frac{z_2}{z_3}$ f) $z_1(z_3 + z_2)$

g) $z_1 . z_2 + z_1 . z_3$ h) $3z_2 - 2z_1$ i) $|z_1 + z_2|$

$(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) = -2i$ حقق صحة مايلي

Solution: $= (\sqrt{2} - i - i + i^2\sqrt{2}) = -2i$

$(1 - i)^4 = -4$ حقق صحة مايلي

Solution: $= (1 - i)^2(1 - i)^2 = (1 - 2i + i^2)(1 - 2i + i^2)$

$= 1 - 2i + i^2 - 2i + 4i^2 - 2i^3 + i^2 - 2i^3 + i^4 = 1 - 4i + 2i^2 + 4i^2 - 4i^3 + i^4$

$= 1 - 4i - 2 - 4 + 4i + 1 = -4$ وبتعويض قيمة الأعداد التخيلية

$\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = -\frac{2}{5}$ حقق صحة مايلي

Solution: $\frac{5i + 10i^2 + 6 - 8i - 3i + 4i^2}{15i - 20i^2} = \frac{5i - 10 + 6 - 8i - 3i - 4}{15i + 20} = \frac{-6i - 8}{15i + 20} = \frac{-2(3i+4)}{5(3i+4)} = -\frac{2}{5}$

$\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{1}{2}i$ حقق صحة مايلي

Solution: $\frac{5}{(2 - 2i + i^2 - i)(3 - i)} = \frac{5}{6 - 6i + 3i^2 - 3i - 2i + 2i^2 - i^3 + i^2} = \frac{5}{-10i} = \frac{1}{-2i} \times \frac{i}{i} = \frac{1}{2}i$

مثال 5/ جد قيمة $(x \ , \ y)$ التي تحققان المعادلة التالية $y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$

الحل / نستخدم خاصية الضرب بين قوسين من الأعداد المركبة وهي

(الحقيقي   الحقيقي + التخيلي   التخيلي) + (الحقيقي   التخيلي + التخيلي   الحقيقي)

$$y + 5i = (2x^2 - 2) + (4x + x)i = (2x^2 - 2) + (5xi)$$

$\therefore 5i = 5xi \qquad \therefore x = 1$

$\therefore y = 2x^2 - 2 = 2(1)^2 - 2 = 0.0$

مثال 6/ : برهن صحة المعادلة التالية $\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$

الحل :- نحلل الطرف الأيمن

$$\frac{1}{(3-4i)} - \frac{1}{(3+4i)} == \frac{1}{(3-4i)} \times \frac{(3+4i)}{(3+4i)} - \frac{1}{(3+4i)} \times \frac{(3-4i)}{(3-4i)} =$$

$$= \frac{(3+4i)}{9+16} - \frac{(3-4i)}{9+16} = \frac{(3+4i)-(3-4i)}{25} = \frac{8i}{25}$$ ويساوي الطرف الايسر

مثال 7/ – : برهن صحة المعادلة التالية $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$

Solution: –

$$\frac{(1-i)^2}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1-2i-1)(1-i)}{2} + \frac{(1+2i-1)(1+i)}{2} = \frac{-2-2i}{2} + \frac{-2+2i}{2}$$

$$= \frac{-1-i}{1} + \frac{-1+i}{1} = \frac{-1-i-1+i}{1} = -2$$ ويساوي الطرف الايسر

مثال 8/ جد قيمة $(x \;,\; y)$ التي تحققان المعادلة التالية $\frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$

Solution:

$$\frac{2-i}{1+i}x \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{2-2i-i+i^2}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}ix$$

$$\frac{3-i}{2+i}y \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{(6-3i-2i+i^2)}{5}y = \frac{5-5i}{5}y = y - iy$$

$$\frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$\therefore \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}ix + y - iy = -i$$

$x - 3ix + 2y - 2iy = -2i$ ……… (بالضرب × 2)

$x + 2y = 0.0$ ………………(1)

$-3x - 2y = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

بجمع معادلة $(1) + (2)$ …… $-2x = -2 \ldots\ldots\ldots$ $\therefore x = 1$

$1 + 2y = 0.0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\therefore y = -\frac{1}{2}$

مثال 9/ اذا كان $M = \frac{13-i}{4+i}$, $L = \frac{7-i}{2-i}$ اثبت ان (L , M) عددان مترافقان

Solution: $L = \frac{7-i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{14+7i-2i-i^2}{5} = \frac{15+5i}{5} = 3 + i$

$M = \frac{13-i}{4+i} \times \frac{4-i}{4-i} = \frac{52-13i-4i+i^2}{17} = \frac{51-17i}{17} = 3 - i$

$L + M = 3 + i + 3 - i = 6$

$L \times M = (3+i)(3-i) = 9 + 1 = 10$

بما ان $L \times M$ و $L + M$ = عددان حقيقيان

$\therefore L , M$ عددان مترافقان

مثال 10/ جد قيمة (x , y) التي تحققان المعادلة التالية $2[xy - (x+y)i] = 4 - 6i$

Solution:

$2xy = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $xy = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$-2(x+y) = -6 \ldots\ldots\ldots\ldots x + y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$y = 3 - x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$.نعوض في

$x(3-x) = 2 \ldots\ldots\ldots 3x - x^2 = 2 \ldots\ldots\ldots 3x - x^2 - 2 = 0.0$

$x^2 - 3x + 2 = 0.0 \quad \ldots\ldots (x-2)(x-1) = 0.0$

اما $x = 2$, $\therefore y = 3 - 2 = 1$

أو $x = 1$, $\therefore y = 3 - 1 = 2$

مثال 11/ جد قيمة (x , y) التي تحققان المعادلة التالية $x + y - (x^2 + y^2)i = 4 - 8i$

Solution:

$x + y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$-(x^2 + y^2) = -8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad x^2 + y^2 = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$y = 4 - x$ ……… (1) من

$x^2 + (4-x)^2 = 8$ ……………… $x^2 + 16 - 8x + x^2 = 8$

$2x^2 - 8x + 8 = 0.0$ …………… $x^2 - 4x + 4 = 0.0$

$(x-2)(x-2) = 0.0$ ……………… $(x-2)^2 = 0.0$

$\therefore x = 2$ ………………… $y = 2$

مثال 12/ جد قيمة $(x \ , \ y)$ التي تحققان المعادلة التالية $(x+2i)(y+2i)+1 = 8i$

Solution: $xy + 2xi + 2yi + 4i^2 + 1 = 8i$

$xy - 4 + 1 = 0.0$ …………… $xy = 3$ ……………………… (1)

$2x + 2y = 8$ ………… $x + y = 4$ ……………………… (2)

$y = 4 - x$ ……………………… (3)

$x(4-x) = 3$ …………… $4x - x^2 = 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0.0$ …… $(x-3)(x-1) = 0.0$

أما $x = 3$ …… , $y = 1$ أو $x = 1$ ……, $y = 3$

مثال 13/ جد قيمة $(A \ , \ B)$ التي تحققان المعادلة التالية $(A+2i)(A-i) = \frac{121-9B^2i^2}{11+3Bi}$

Solution: $A^2 - Ai + 2Ai - 2i^2 = (121 - 9B^2i^2)/(11+3Bi)$

$$A^2 + 2 + Ai = \frac{(11-3Bi) \quad (11+3Bi)}{11+3Bi}$$

$A^2 + 2 = 11$ …………… $A = \mp 3$

$A = -3B$

عندما $A = 3$ …………… $B = -1$

عندما $A = -3$ …………… $B = 1$

vectors

the vector is any quantity which has magnitude and direction

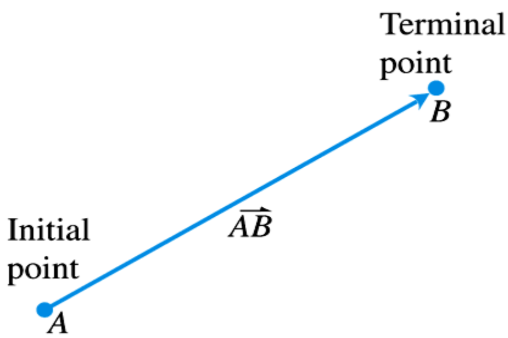


FIGURE 11.7 The directed line segment $\overrightarrow{AB}$.

$$v = a_i + b_j$$

then a_i , b_j *are the components of vector*

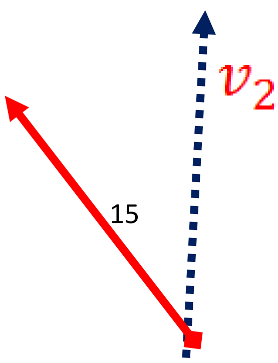
Examples: $-$*Draw the flowing vectors*

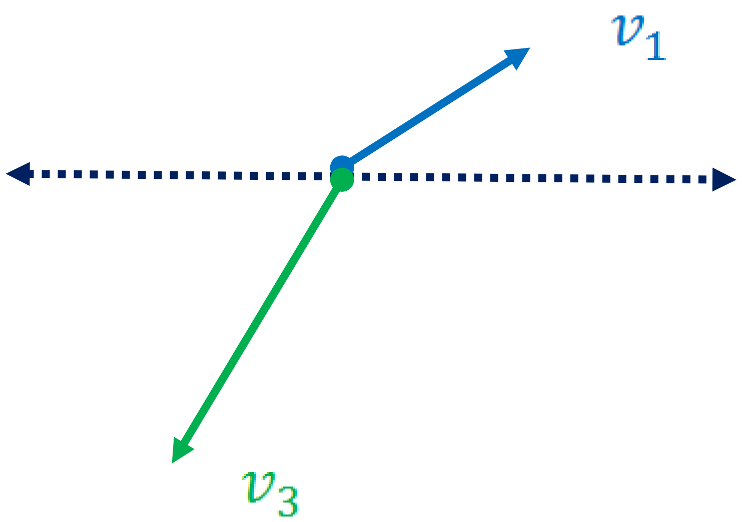
$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{a}_1\mathrm{i} + \mathrm{b}_1\, j = 2i + j$$

$$\mathrm{v}_2 = \mathrm{a}_2\mathrm{i} + \mathrm{b}_2\, j = -3i + 4j$$

$$\mathrm{v}_3 = \mathrm{a}_3\mathrm{i} + \mathrm{b}_3\, j = -2i - 5j$$

solution: $-$





$length\ of\ a\ vector$

$let \quad (v = a_i + b_j)\ be\ a\ vector\ we\ denotc\ to\ length\ of\ (v) is$

$$the\ length\ of\ vector = |V| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$Examples: -Defind\ the\ length\ of\ the\ flowing\ vectors$

$v_1 = 2i + j \ldots \ldots \ldots \ldots \ |V_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$v_2 = -3i + 4j \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ |V_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

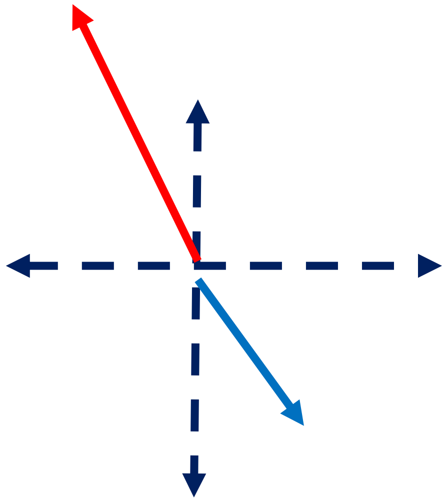
$v_3 = -2i - 5j \ldots \ldots \ldots , , , , , . |V_3| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$.

product of two vectors

$let \;\; v_1 = a_1 i + b_1\, j$

$v_2 = a_2 i + b_2\, j$

$then \;\; (v_1 . v_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 \,)$



Example $\quad let \;\; v_1 = 2i - 3j$

$v_2 = -3i + 4j$

$then \;\; v_1, v_2 = 2(-3) + (-3)4 = -6 - 12 = -18$

$v_1, v_2 = |V_1||V_2| \, \cos\theta$

$|V_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$|V_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} \; = 5$

$$\cos\theta \;\; = \frac{v_1, v_2}{|V_1||V_2|} = \frac{-18}{\sqrt{13}\;.\;5} = \frac{-18}{5\sqrt{13}}$$

$$\therefore \;\; \theta \;\; = \cos^{-1} \frac{-18}{5\sqrt{13}} \;\; = \quad 176^{\circ}$$

Algebra of vectors: $-$ 1) *Addition of vectors (resultant)*

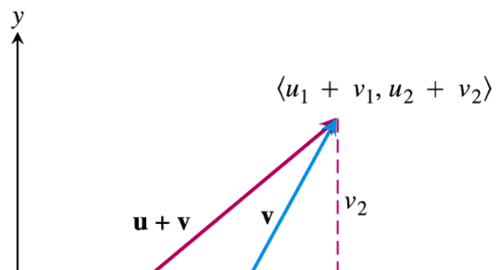
$let \;\; U = u_1 i + u_2\, j \quad , \quad V = v_1 i + v_2\, j$

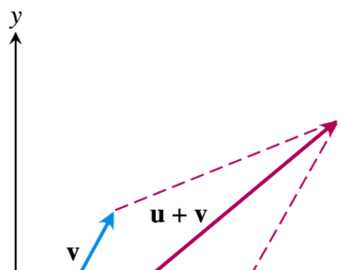
$then: U + V = (u_1 + v_1)i + (u_2 + v_2)j$

Example: $-$

$let \;\; U = 5i + 2\, j \quad , \quad V = 2i + 4\, j$

$U + V = (5 + 2)i + (2 + 4)j = 7i + 6j$





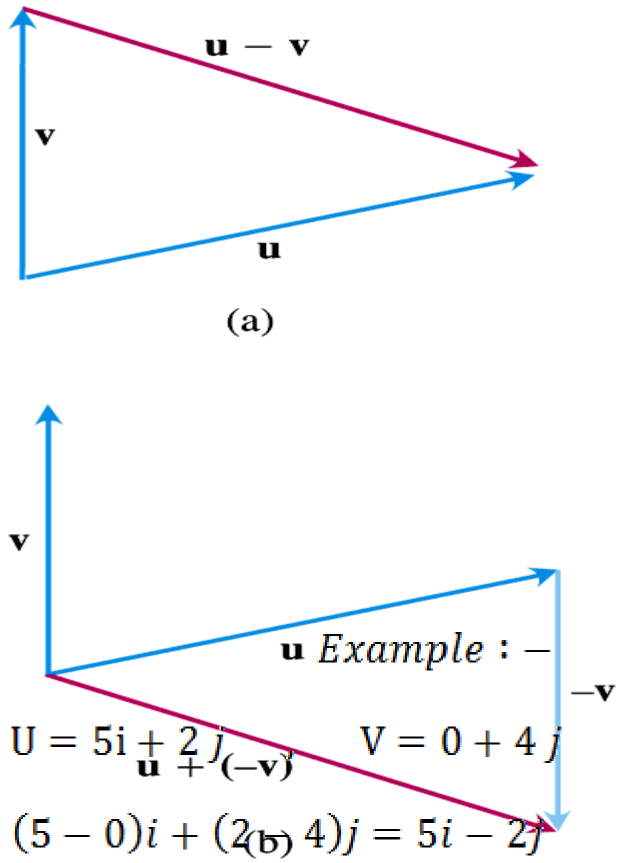


FIGURE 11.14 (a) The vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, when added to $\mathbf{v}$, gives $\mathbf{u}$. (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

2) *Subtraction*

$let \;\; \mathrm{U} = \mathrm{u}_1 \mathrm{i} + \mathrm{u}_2\, j \quad , \quad \mathrm{V} = \mathrm{v}_1 \mathrm{i} + \mathrm{v}_2\, j$

$\text{then}: \mathrm{U} - \mathrm{V} = (\mathrm{u}_1 - \mathrm{v}_1)i + (u_2 - v_2)j$

Example :−

$let \;\; \mathrm{U} = 5\mathrm{i} + 2\,j \qquad \mathrm{V} = 0 + 4\,j$

$\mathrm{U} - \mathrm{V} = (5 - 0)i + (2 - 4)j = 5i - 2j$

$let \;\; \mathrm{v}_1 = 3\mathrm{i} + 2\,j \quad , \quad \mathrm{v}_2 = 4\mathrm{i} - 3\,j$

$\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = (3 + 4)i + (2 - 3)j = 7i - j$

$\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 = (3 - 4)i + (2 - (-3))j = -i + 5j$

Definition (zero vector)

$let \;\; v = ai + bj = 0 \qquad if\ and\ only\ if\ (a = 0 \quad , \quad b = 0)$

Multiplication of a vector by scalar number

$let \;\; \mathrm{v}_1 = \mathrm{a}_1 \mathrm{i} + \mathrm{b}_1\, j$ *be a vectorand* (β) *is areal number*

$then \quad \beta v = \beta(a_1 i + b_1 j) = \beta a_1 i + \beta b_1 j$

$Example: \quad let \quad v_1 = 3i - 4j \quad and \quad \beta = 2$

$then \quad \beta v_1 = \beta(a_1 i + b_1 j) = 2(3i - 4j) = 6i - 8j$

$when \quad \beta = 0 \text{ , } then\ \beta v_1 = 0(3i - 4j) = o \ (zero\ vector)$

Orthogonal vectors

$let \quad v_1 = a_1 i + b_1 j \quad , \quad v_2 = a_2 i + b_2 j$

$Then \ v_1 \ is \ Orthogonal \ to \ v_2 \ if \ and \ only \ if \quad (v_1 . v_2) = 0$

$Example: \quad let \quad v_1 = 3i - 2j \quad and \quad v_2 = -2i - 3j$

$then \ v_1 . v_2 = 3(-2) + (-2)(-3) = -6 + 6 = 0 \quad so \quad v_1 \perp v_2$

Direction : –

for any non zero vector V , we obfain (نحصل) *aunit vector called direction*

$$the\ direction\ of\ V = \frac{V}{|V|}$$

EXAMPLE 6 If $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ is a velocity vector, express $\mathbf{v}$ as a product of its speed times a unit vector in the direction of motion.

Solution Speed is the magnitude (length) of $\mathbf{v}$:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

The unit vector $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ has the same direction as $\mathbf{v}$:

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

So

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = \underset{\substack{\text{Length} \\ \text{(speed)}}}{5}\underbrace{\left(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}\right)}_{\text{Direction of motion}}.$$

$$Example: \quad let \ \ \mathrm{v} = 2\mathrm{i} - 3\,j$$

$$then\ the\ length = |V| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$The\ direction\ of\ \ V = \frac{v}{|V|} = \frac{2\mathrm{i} - 3\,j}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}i - \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

$$\mathrm{v} = 2\mathrm{i} - 3\,j = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}i - \frac{3}{\sqrt{13}}j\right)$$

$$vectors\ in\ the\ (x, y, z) space\ (or\ in\ the\ 3 - space)$$

$$let\ the\ point\ origin\ \ O(0{,}0{,}0)$$

$$and\ \ P(a, b, c) be\ any\ point\ in\ the\ space\ (xyz)$$

$$then\ (ai, bj, ck) are\ the\ compenents\ of\ the\ vector$$

$$the\ vector\ \ OP^{\rightarrow} = V = ai + bj + ck$$

$$Example: \quad let\ \ \mathrm{p}(2{,}4{,}5) is\ a\ point\ in\ the\ (x, y, z) space$$

$$then\ the\ vector\ \ OP^{\rightarrow} = V = 2i + 4j + 5k$$

$$and\ the\ (2i + 4j + 5k) are\ the\ compenents\ of the\ \ \ OP^{\rightarrow}$$

$$Example: \quad let\ \ \mathrm{p}(3, -4, -5) is\ a\ point\ in\ the\ (x, y, z) space$$

$$then\ the\ vector\ \ OP^{\rightarrow} = V = 3i - 4j - 5k$$

$$and\ the\ (3i - 4j - 5k\ ) are\ the\ compenents\ of the\ \ \ OP^{\rightarrow}$$

$Algebra\ of\ vectors$ in the $(x, y, z)space$

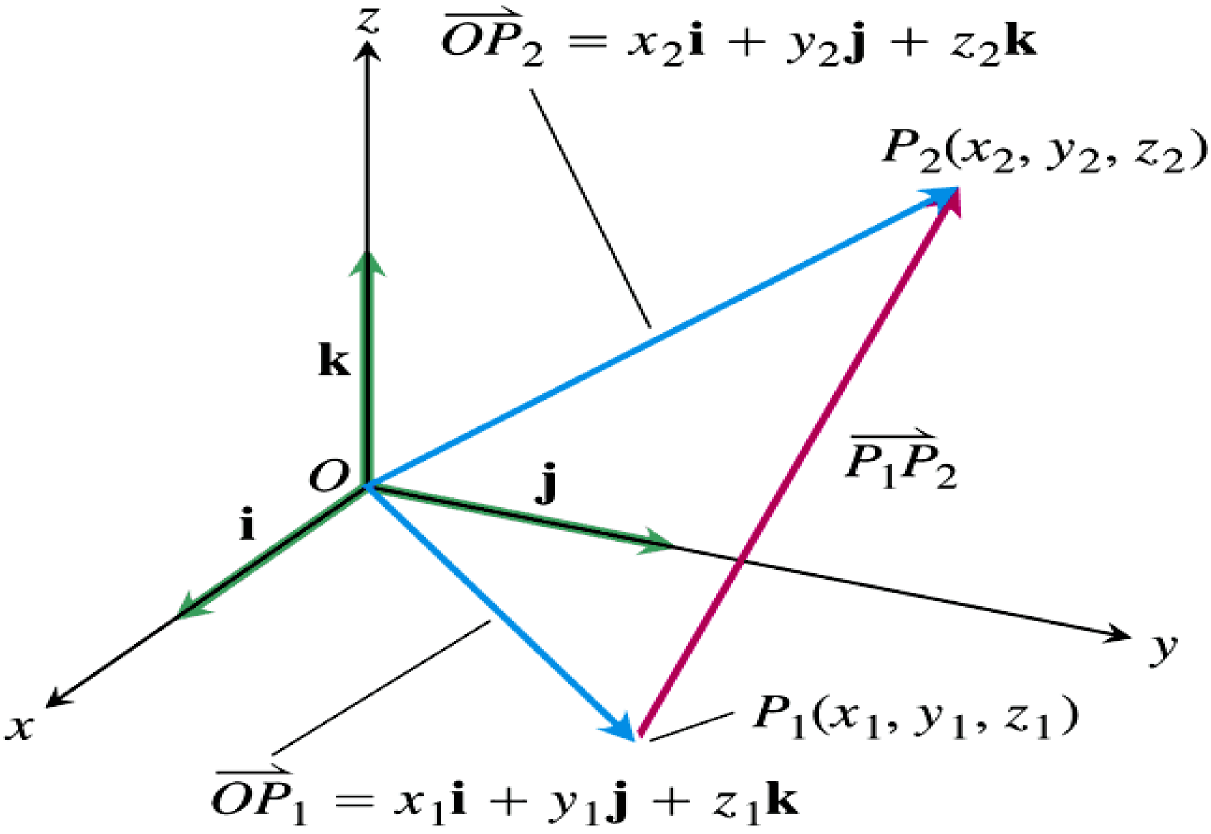


FIGURE 11.16 The vector from P_1 to P_2 is $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$.

1) *Addition of vectors (resultant)*

$let \quad \mathrm{v}_1 = \mathrm{a}_1\mathrm{i} + \mathrm{b}_1\, j + \mathrm{c}_1 k \quad , \qquad \mathrm{v}_2 = \mathrm{a}_2\mathrm{i} + \mathrm{b}_2\, j + \mathrm{c}_2 k$

$\text{then}: \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = (\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2)i + (b_1 + b_2)j + (c_1 + c_2)k$

$Example: let \quad \mathrm{v}_1 = 3\mathrm{i} + 2\, j + 5k \quad , \qquad \mathrm{v}_2 = 2\mathrm{i} - 4\, j + 3k$

$\text{then}: \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = (3+2)i + (2-4)j + (5+3)k$

$then\ the\ resultant = R = 5i - 2j + 8k$

2) *Subtraction*

$let \quad \mathrm{v}_1 = \mathrm{a}_1\mathrm{i} + \mathrm{b}_1\, j + \mathrm{c}_1 k \quad , \qquad \mathrm{v}_2 = \mathrm{a}_2\mathrm{i} + \mathrm{b}_2\, j + \mathrm{c}_2 k$

$\text{then}: \mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 = (\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2)i + (b_1 - b_2)j + (c_1 - c_2)k$

$Example: let \quad \mathrm{v}_1 = 3\mathrm{i} + 2\, j + 5k \quad , \qquad \mathrm{v}_2 = 2\mathrm{i} - 4\, j + 3k$

$\text{then}: \mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 = (3-2)i + (2-(-4))j + (5-3)k = i + 6j + 2k$

3) *Multiplication of a vector by scalar number*

$let\ \ V = ai + bj + ck\ in\ the\ (x, y, z) space\ and\ \ (\beta) is\ areal\ number$

$$then \quad \beta v = \beta(ai + bj + ck) = \beta\, \mathrm{a}i + \beta \mathrm{b}\, j + \beta ck$$

$$Example: let \quad V = 3i - 2j + 4k \quad , \quad \text{and} \quad \beta = 2$$

$$then \quad \beta v = \beta(ai + bj + ck) = 2(3i - 2j + 4k) = 6i - 4j + 8k$$

product of two vectors

$$let \quad v_1 = a_1 i + b_1 j + c_1 k$$

$$v_2 = a_2 i + b_2 j + c_2 k$$

$$then \quad v_1 . v_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

vector (or cross)product of vectors (الضرب الاتجاهي)

Definition ; let U and V be two non zero vectors θ is the angle between U and V

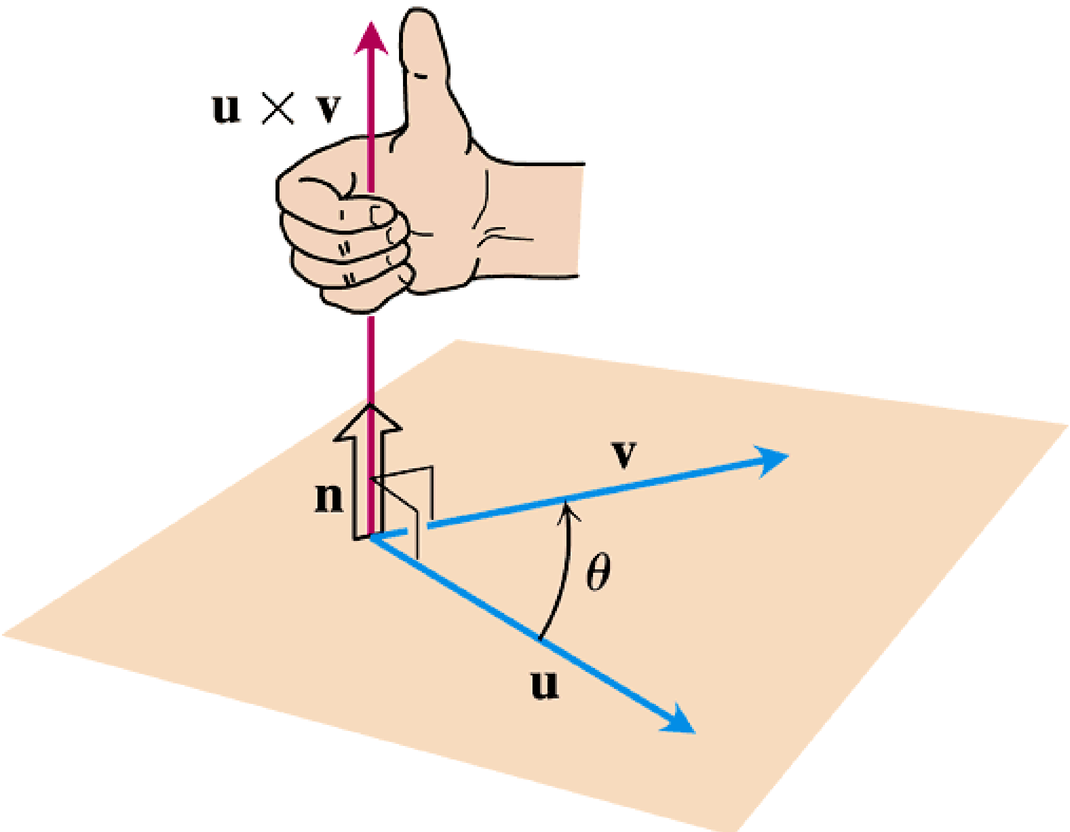
let N be a unit vector perpendicalar to the plans of (U)and (V)

Avector product of U ,V is denoted by U × V and is defined by

$U \times V = N|U||V| \sin\theta$ (باتجاه عكس عقرب الساعة)

$U \times V = -N|U||V| \sin\theta$ (باتجاه عقرب الساعة)

$not: U \times V \neq V \times U$



DEFINITION

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\theta)\, \mathbf{n}$$

Parallel Vectors

Nonzero vectors **u** and **v** are parallel if and only if $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$V \times U = N|U||V| \sin\theta$ (باتجاه عكس عقرب الساعة)

$V \times U = -N|U||V| \sin\theta$ (باتجاه عقرب الساعة)

$V \times U = N|U||V| \sin\theta$

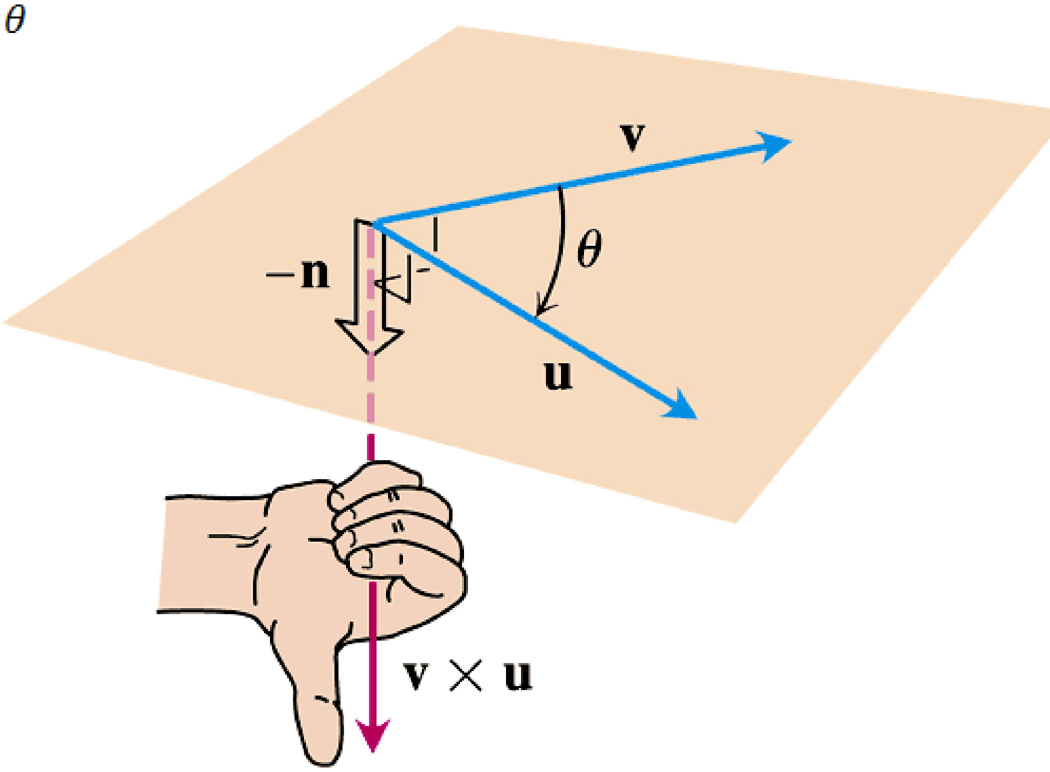


FIGURE 11.27 The construction of $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

$Remark: if\ U\ and\ V\ parallel\ then\ \theta = 0\ or\ \pi\ then\ U \times V = 0\ (zero\ vector)$

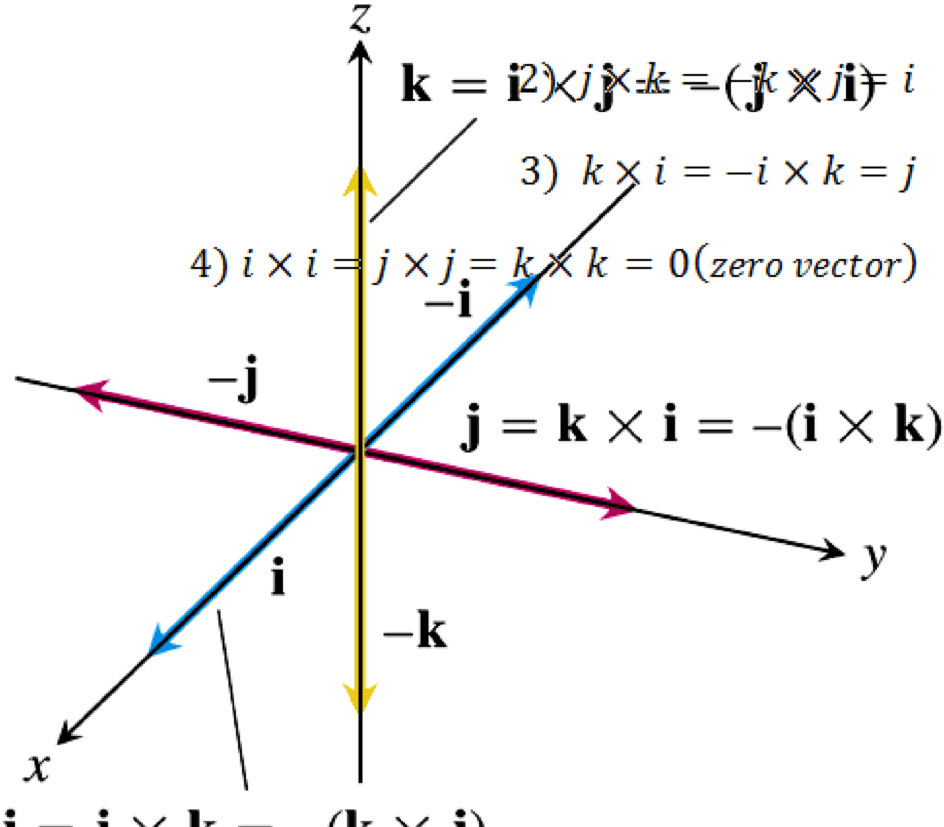
$if\ (i, j, k)\ are\ anit\ vectors\ in\ the\ direction\ of\ (x, y, z)\ axis\ then$

$1)\ i \times j = -j \times i = k$

$2)\ j \times k = -k \times j = i$

$3)\ k \times i = -i \times k = j$

$4)\ i \times i = j \times j = k \times k = 0 (zero\ vector)$



$theorem$ (مبرهنة)

$$let \qquad A = a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad , \qquad B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$A \times B = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

$$= [a_1 i . b_1 i + a_1 i . b_2 j + a_1 i . b_3 k + a_2 j . b_1 i + a_2 j . b_2 j + a_2 j . b_3 k + a_3 k . b_1 i + a_3 k . b_2 j + a_3 k . b_3 k]$$

$$A \times B = a_1 b_2 K + (-a_1 b_3 j) + (-a_2 b_1 k) + a_2 b_3 i + a_3 b_1 j + (-a_3 b_2 i)$$

$$A \times B = (a_2 b_{3-} a_3 b_2)\, i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ (طريقة ثانية باستخدام المصفوفات)

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

Calculating Cross Products Using Determinants

If $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ and $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, then

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

EXAMPLE 1 Find $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ and $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ if $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solution

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$$

Example : let $\quad \mathrm{A} = 2\mathrm{i} - j + 3k \quad , \quad \mathrm{B} = \mathrm{i} + 2j - k$

show that $A \times B \perp A \quad , \quad A \times B \perp B$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = (1-6)i - 2 - 3j + (4-(-1))k = -5i + 5j + 5k$$

$$(A \times B).A = (-5i + 5j + 5k).(2\mathrm{i} - j + 3k)$$

$$(A \times B).A = -10 - 5 + 15 = 0 \qquad \therefore \ (A \times B) \perp A$$

$$(A \times B).B = (-5i + 5j + 5k).(\mathrm{i} + 2j - k)$$

$$(A \times B).B = -5(1) + 10 - 5 = 0 \qquad \therefore \ (A \times B) \perp B$$

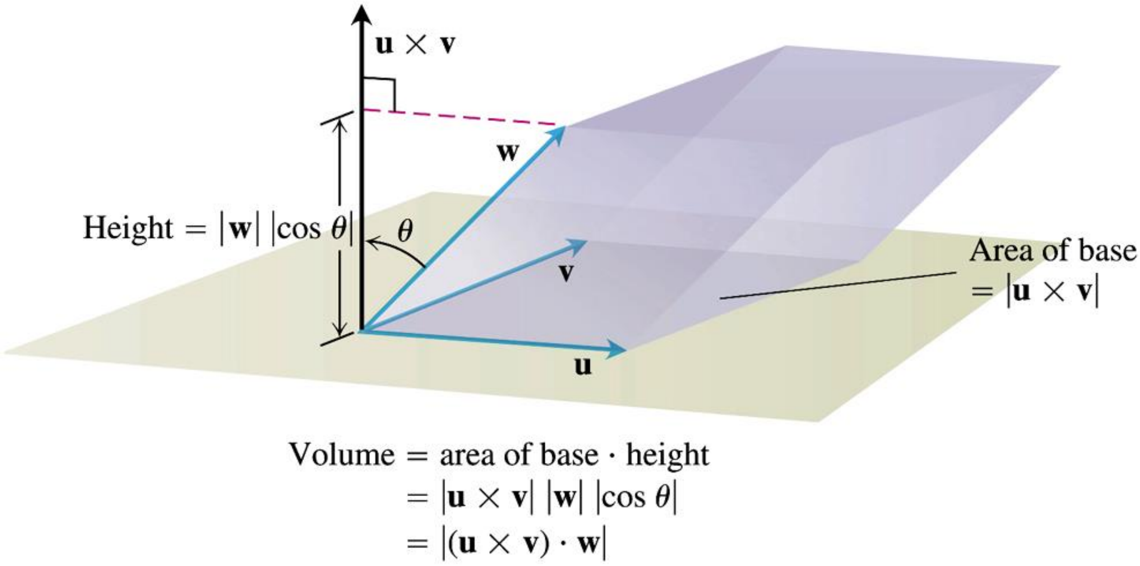


FIGURE 11.33 The number $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ is the volume of a parallelepiped.

Calculating the Triple Scalar Product

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

EXAMPLE 6 Find the volume of the box (parallelepiped) determined by $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, and $\mathbf{w} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Solution Using the rule for calculating determinants, we find

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -23.$$

The volume is $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = 23$ units cubed.

$the\ logarithmic\ function$

اللوغاريتم :- هو ذلك الأس لو رفع إليه الأساس لنتج ذلك العدد.

$$y = \log_a x \quad \dots\dots\dots\dots . a^y = x$$

$Examples: -$

$\log_{10} 100 = 2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots 10^2 = 100$

$\log_4 16 = 2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 4^2 = 16$

$\log_{10} 1 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots . . 10^0 = 1 \quad (\log 1 = 0)$

$\log_e x = \ln x \dots\dots\dots\dots\dots . .$ الطبيعي اللوغارتيم يسمى $e = 2.71828$

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

$sumple\ lowe\ of\ the\ logarithmic\ function$

1) $\log xy = \log x + \log y$

2) $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

3) $\log x^n = n \log x$

4) $\log x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log x = \frac{\log x}{n}$

$solve\ \ for\ each\ of\ the\ fellowing\ fanections\ .$

to impose $\log x = a$; $\log y = b$

$find \quad \log(xy)$

$solution$: $x = 10^a$; $y = 10^b$

$xy = 10^a \times 10^b = 10^{a+b}$

$\log(xy) = \log x + \log y$

(2) to firm it : $\log 64 - 3\log 2 - 2\log 4 = \log\frac{1}{2}$

$solution : -$

$\log 2^6 - 3\log 2 - 2\log 2^2 = 6\log 2 - 3\log 2 - 4\log 2 = -\log 2$

$\therefore \log\frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 0 - \log 2 = -\log 2$

$solve\ \ for\ each\ of\ the\ fellowing\ fanections\ .$

$x^2 = 8y^3$, $y = 2x^{\frac{1}{3}}$

- $solution : -$

$\text{Log}\, y = \log 2x^{\frac{1}{3}} = \log 2 + \frac{1}{3}\log x$

$\text{Log}\, x^2 = \log 8y^3$

$2\log x = \log 8 + \log y^3 = 3\log 2 + 3\log y$

$2\log x = 3\log 2 + 3\left[\log 2 + \frac{1}{3}\log x\right]$

$2\log x = 3\log 2 + 3\log 2 + \log x = 6\log 2 + \log x$

$\text{Log}\, x = 6\log 2 = \log 2^6$

$\therefore \quad x = 2^6 = 64$

$x^2 = 8y^3 \to y^3 = \frac{x^2}{8} = \frac{64^2}{8} = \frac{8^4}{8} = 8^3$

$\therefore \quad y = 8$

$to\ know\ since$

$c^{\log a} = x \quad , \quad c^{\log b} = y \quad , \quad a^{\log b} = z$

$to\ firm \quad : \quad y = xz$

$solution : -$

$a = c^x \quad , b = c^y \quad , \quad b = a^z$

$c^y = a^z = c^{xz} \quad , \quad \therefore y = xz$

solve : $\log(4x + 10) + \log(x - 2) = 2\log(2x - 1)$

$solution : -$

$\log(4x + 10)(x - 2) = \log(2x - 1)^2$

$(4x + 10)(x - 2) = (2x - 1)^2 = (4x^2 - 4x + 1)$

$(4x^2 - 8x + 10x - 20) - (4x^2 - 4x + 1) = 0$

$6x - 21 = 0 \quad \ldots\ldots \qquad \therefore x = \frac{21}{6} = 3.5$

$The\ derivatives\ of\ logarithmic\ function$

(1) $\frac{d(\ln v)}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$

(2) $\frac{d(\log v)}{dx} = \frac{\log e}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$

(3) $\frac{d(a^v)}{dx} = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$

(4) $\frac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u \,.\, u^v \frac{dv}{dx}$

$Examples: -\ find\ \frac{dy}{dx}$

(1) $y = \ln(3x^2 + 5x - 4)$ $\ldots\ldots\ldots \frac{dy}{dx} = \frac{6x+5}{3x^2+5x-4}$

(2) $y = \log(3x^2 + 4)$ $\ldots . \frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{(3x^2+4)} 6x = \frac{6x}{(3x^2+4)} \log e$

(3) $y = 3^{\sin 2x}$ $\ldots .. \frac{dy}{dx} = 3^{\sin 2x} \ln 3 \ (2\cos 2x)$

(4) $y = (x^2+4)^{\cos 3x}$ $\ldots , u = x^2 + 4 \quad , \quad v = \cos 3x$

$\frac{dy}{dx} = \cos 3x \ (x^2+4)^{(\cos 3x)-1} (2x) + \ln(x^2+4) \ (x^2+4)^{\cos 3x} \ -3 \sin 3x$

$The\ Exponent\ functions$

$$y = e^x$$

$$y = e^u$$

$The\ derivatives\ of\ Exponent\ functions$

$$(1)\quad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad (2)\quad \frac{d(e^u)}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

$Examples: -\ find\ \frac{dy}{dx}$

(1) $y = e^{3x}$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$$

(2) $y = e^{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x$$

(3) $y = e^{\sqrt{3x^2+5}}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{3x^2+5}} \left(\frac{1}{2}\right)(3x^2+5)^{-\frac{1}{2}}(6x)$$

(4) $y = e^{2x+1}$

$$.\frac{dy}{dx} = 2 \quad e^{2x+1}$$

(5) $y = e^{\sqrt{x+1}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$$

(6) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})}{2}$$

(7) $y = e^{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\ln x}}{x}$$

(8) $y = x^2 e^x$

$$\frac{dy}{dx} = x^2e^x + e^x(2x) = e^x(x^2 + 2x)$$

(9) $$y = \sqrt{x-1}\ \ e^{\sqrt{x-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)\ \ e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}} + \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}} \ = \frac{\left(\sqrt{x-1}\ +1\right)\ \ e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}}$$

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

3) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

4) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

5) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

6) $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

7) $cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + cos\, 2x)$

8) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

9) $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

10) $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$

11) $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

12) $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

13) $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$

14) $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$

15) $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$

$5\cos^2 x + 4\sin x - 4 = 0$ مثال / حل المعادلة التالية

Solution : $5\cos^2 x + 4\sin x - 4 = 5(1-\sin^2 x) + 4\sin x - 4 = 0$

$= \; 5\sin^2 x \; +4\sin x + 1 = \; 5\sin^2 x \; = -5\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0$

As to

$= (5\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$

$(5\sin x + 1) = 0 \qquad \therefore \; \sin x = \frac{-1}{5}$ اما $\rightarrow$

$\sin x - 1 = 0 \qquad \therefore \sin x = 1$ او

$3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ مثال / حل المعادلة التالية

Solution $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

$3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = (3\sin x - 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

As to

$(3\sin x - 2\cos x) = 0 \quad \rightarrow \; \therefore \; 3\sin x = 2\cos x$ اما

$\therefore \sin x = \frac{2\cos x}{3} \qquad \therefore \tan x = \frac{2}{3}$

Or

$(\sin x - \cos x) = 0 \quad \therefore \quad \sin x = \cos x \quad \therefore \; \tan x = 1$ او

اذا علمت ان $\cos b = \frac{5}{13}$, $\sin a = \frac{3}{5}$ اوجد قيمة $\sin(a+b)$, $\cos(a-b)$

Solution: $-\quad \cos(a) = \frac{4}{5} \rightarrow \sin b = \frac{12}{13}$

$$\mathrm{Sin}(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\mathrm{Sin}(a+b) = \frac{3\times}{5\times}\frac{5}{13} + \frac{4\times}{5\times}\frac{12}{13} = \frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$$

$$\mathrm{Cos}(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\mathrm{Cos}(a-b) = \frac{4}{5}\times\frac{5}{13} + \frac{3}{5}\times\frac{12}{13} = \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65} =$$

اثبت ان $\sqrt{\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}} = \frac{\tan x+1}{\tan x-1}$

Solution: $-\quad \sqrt{\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}} = \sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin 2_x+\cos 2_x-2\sin x\cos x}} = \sqrt{\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}} =$

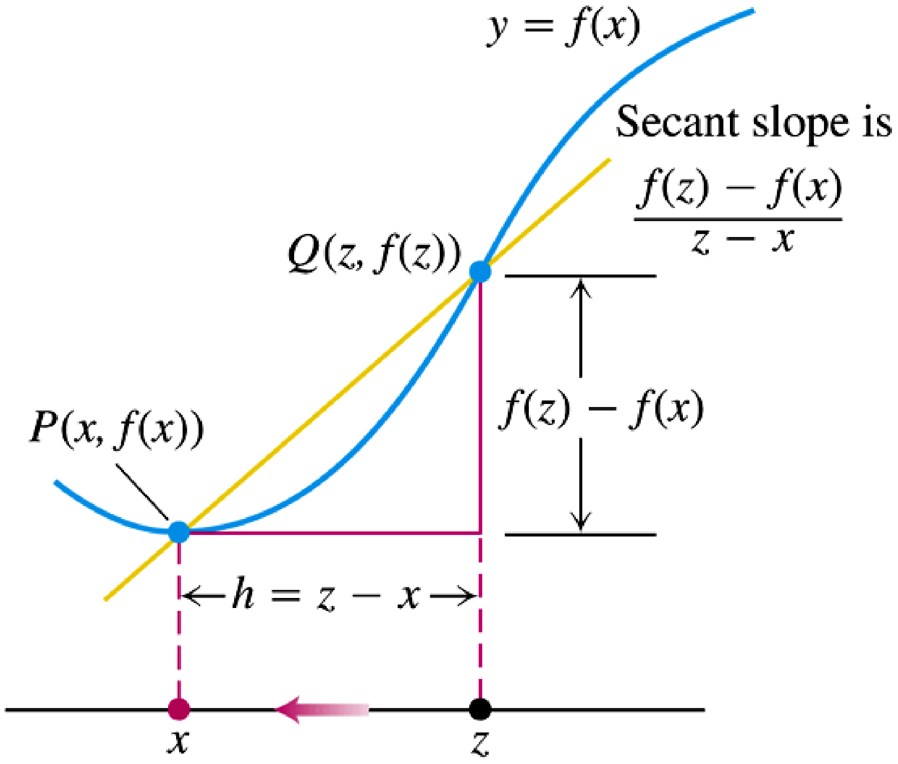
$$= \frac{(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$$

المشتقة (التفاضل)

DEFINITION The **derivative** of the function $f(x)$ with respect to the variable x is the function f' whose value at x is

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

provided the limit exists.



Derivative of f at x is

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

FIGURE 3.1 Two forms for the difference quotient.

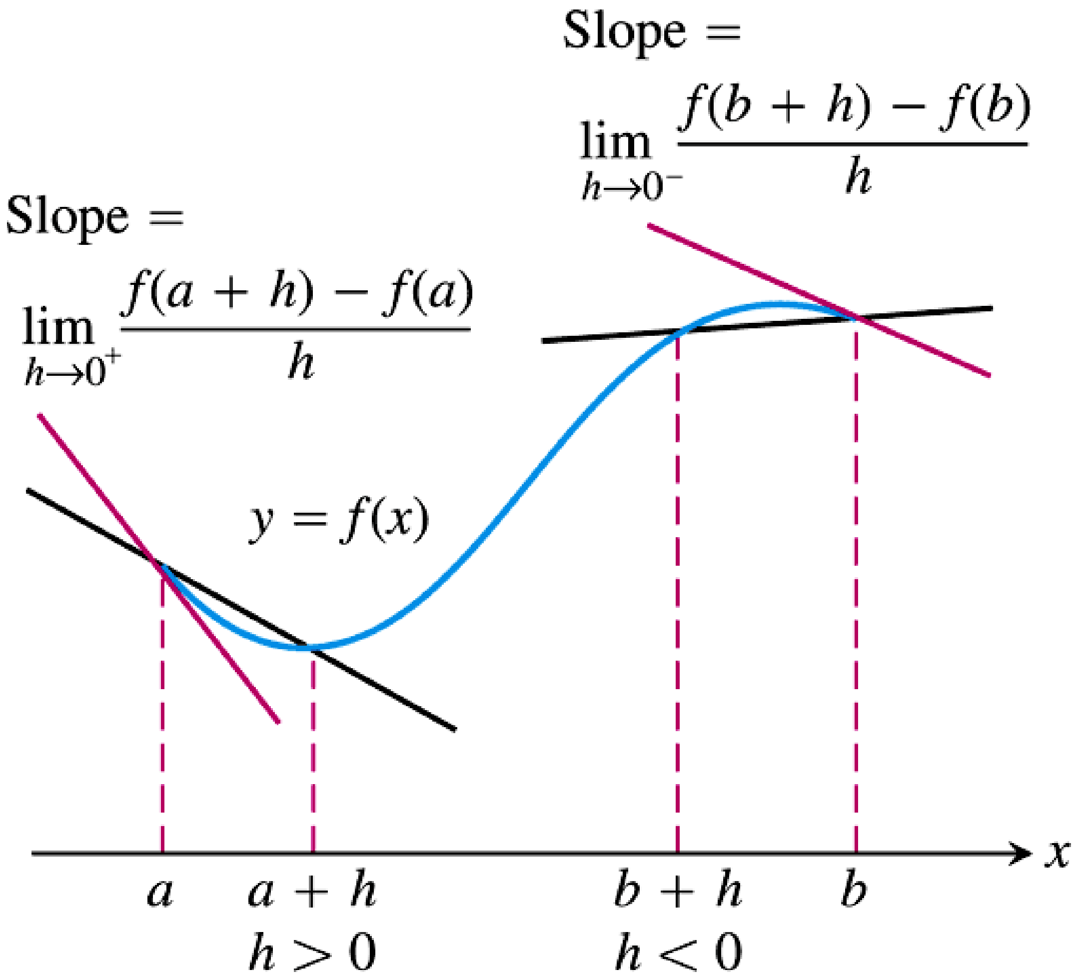


FIGURE 3.3 Derivatives at endpoints are one-sided limits.

RULE 1 Derivative of a Constant Function

If f has the constant value $f(x) = c$, then

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Power Rule for Positive Integers:

If n is a positive integer, then

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

RULE 2 Power Rule (General Version)
If n is any real number, then

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1},$$

for all x where the powers x^n and x^{n-1} are defined.

RULE 3 Constant Multiple Rule
If u is a differentiable function of x, and c is a constant, then

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$

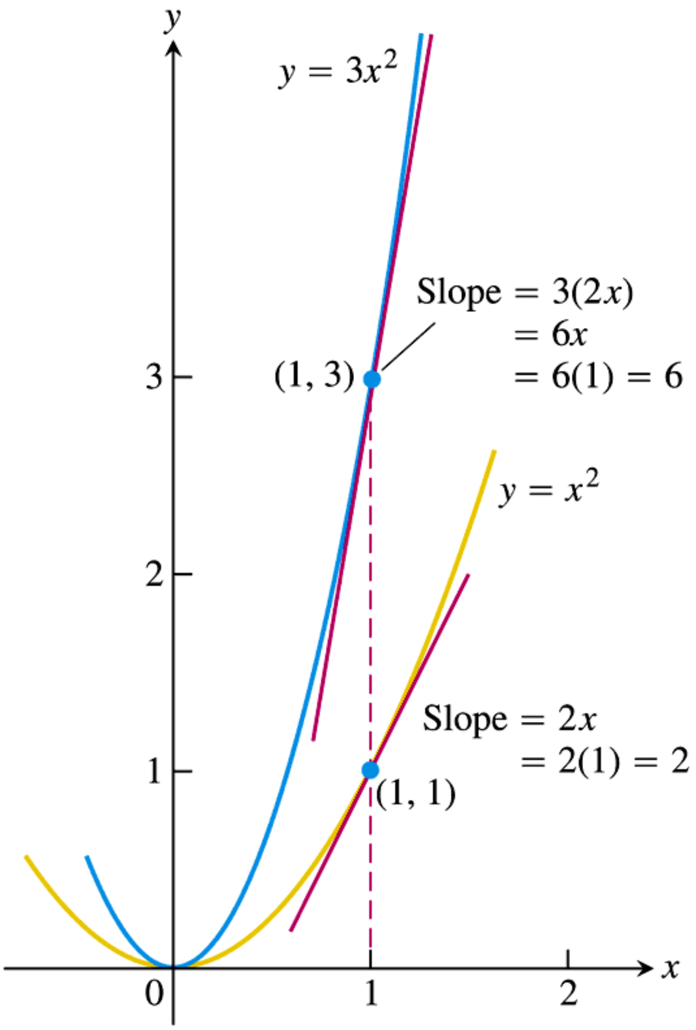


FIGURE 3.7 The graphs of $y = x^2$ and $y = 3x^2$. Tripling the y-coordinates triples the slope (Example 2).

RULE 4 Derivative Sum Rule

If u and v are differentiable functions of x, then their sum $u + v$ is differentiable at every point where u and v are both differentiable. At such points,

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

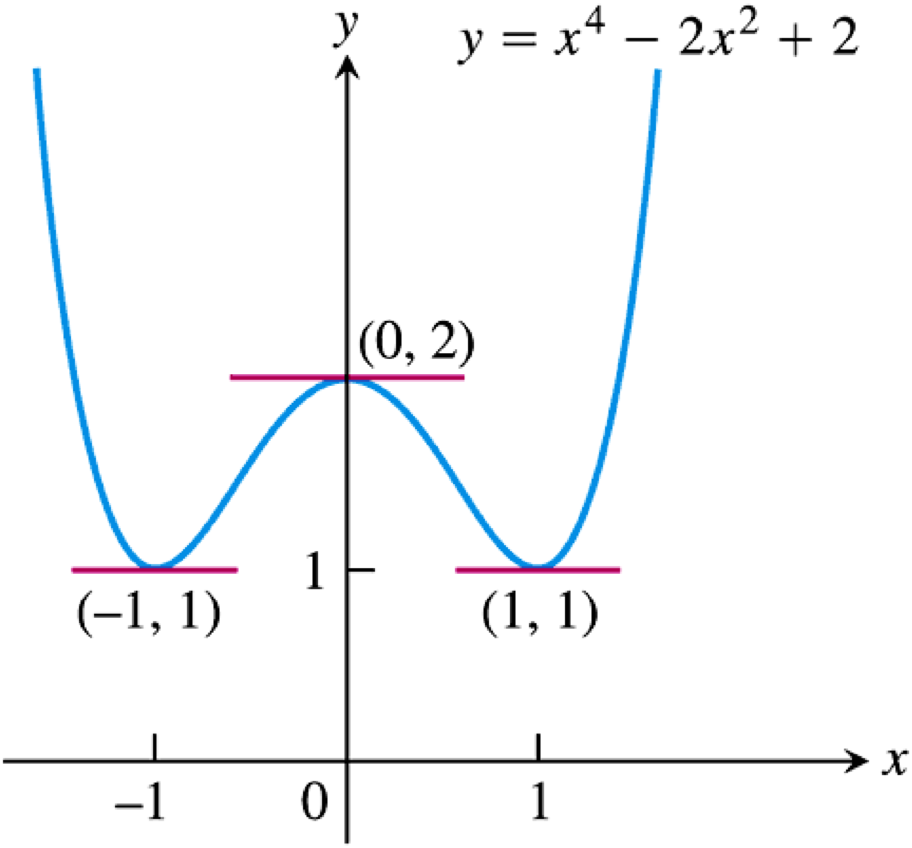


FIGURE 3.8 The curve $y = x^4 - 2x^2 + 2$ and its horizontal tangents (Example 4).

RULE 5 Derivative Product Rule

If u and v are differentiable at x, then so is their product uv, and

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

RULE 6 Derivative Quotient Rule

If u and v are differentiable at x and if $v(x) \neq 0$, then the quotient u/v is differentiable at x, and

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

DEFINITION The **instantaneous rate of change** of f with respect to x at x_0 is the derivative

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

provided the limit exists.

Derivatives of Trigonometric Functions

The derivative of the sine function is the cosine function:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

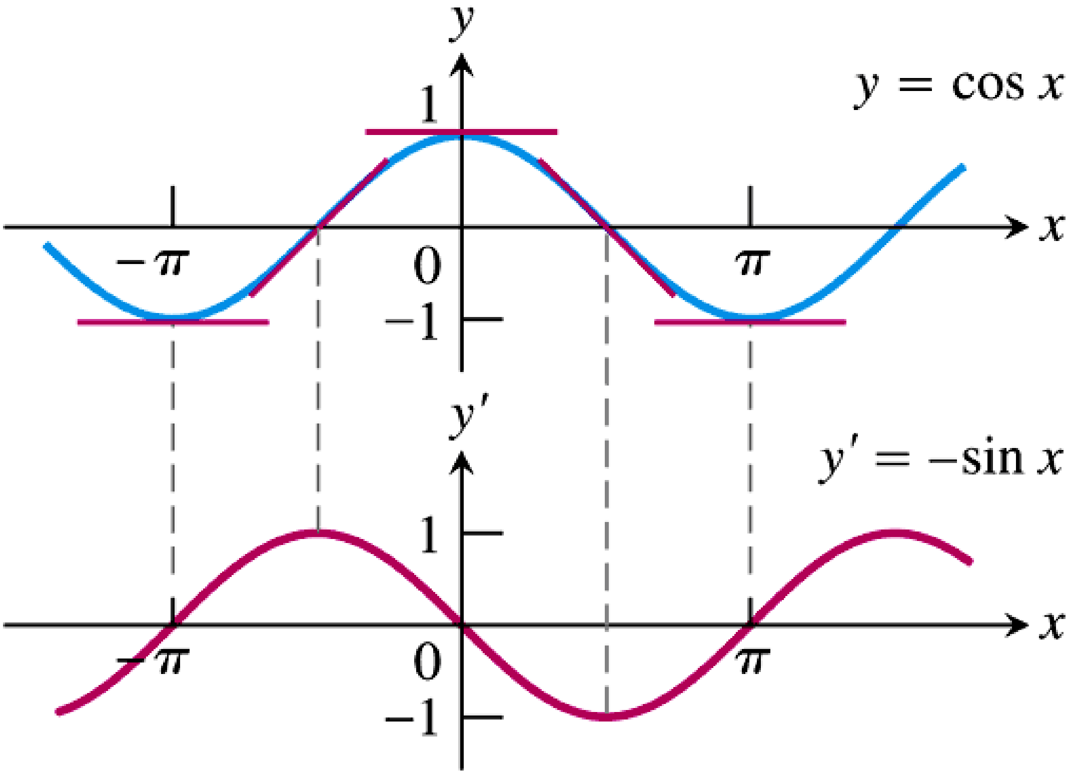


FIGURE 3.17 The curve $y' = -\sin x$ as the graph of the slopes of the tangents to the curve $y = \cos x$.

The derivative of the cosine function is the negative of the sine function:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Derivatives of the Other Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

THEOREM 3 The Chain Rule

If $f(u)$ is differentiable at the point $u = g(x)$ and $g(x)$ is differentiable at x, then the composite function $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ is differentiable at x, and

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

In Leibniz's notation, if $y = f(u)$ and $u = g(x)$, then

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

where dy/du is evaluated at $u = g(x)$.

1) $D_x x^n = nx^{n-1}$

2) $D_x[k.f(x)] = k.D_x\, f(x) = k.nx^{n-1}$

3) $D_x(f \pm g) = D_x f \pm D_x g$

4) $D_x(u.v) = uD_x v + vD_x u$

5) $D_x \frac{u}{v} = \frac{vD_x u - uD_x v}{v^2}$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy\,.du}{du\,.dx}$

7) $D_x \sin u = \cos u\, D_x u$

8) $D_x \cos u = -\sin u\, D_x u$

9) $D_x \tan u = \sec^2 u\, D_x u$ ...... $..u \neq (2\pi - 1)\,{}^{\pi}/_{2}$

10) $D_x \cot u = -\csc^2 u\, D_x u$

11) $D_x \sec u = \sec u \tan u\, D_x u$

12) $D_x \csc u = -\csc u \cot u\, D_x u$

13) $D_x \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, D_x u$ ... $....-1 < u < 1$

14) $D_x \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\, D_x u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 1 < u < 1$

15) $D_x \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\, D_x u$

16) $D_x \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2}\, D_x u$

17) $D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots |u| > 1$

18) $D_x \csc^{-1} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u \ldots\ldots. \qquad .\ldots |u| > 1$

(19) $\frac{d(\ln v)}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$

(20) $\frac{d(\log v)}{dx} = \frac{\log e}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$

(21) $\frac{d(a^v)}{dx} = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$

(22) $\frac{d(u^v)}{dx} = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + \ln u \,.\, u^v \frac{dv}{dx}$

(23) $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

(24) $\frac{d(e^u)}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$

Find the $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ of the following functions

1) $y = (x^2 + 5)^5$

$\frac{dy}{dx} = 5(X^2 + 1)^4 2X = 10X(X^2 + 1)^4 \quad =$

2) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos x - 2\cos x\sin x = 0$$

3) $y = \csc^2 5x$

$$\frac{dy}{dx} = 2\csc 5x\,(-\csc 5x\cot 5x * 5) = -10\ csc^2 5x\ \ \cot 5x$$

4) $y = \cot^2 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \ = 2\cot 3x * (-csc23x * 3) = \ -6\ \ csc^2 3x\ \ \cot 3x$$

5) $y = \ln(x^2 + 2x)$

$$= \frac{dy}{dx} = \frac{(2x+2)}{(x^2+2x)} = \frac{2x+2}{x(x+2)}$$

6) $y = 4e^{\sin X}$

$$= \frac{dy}{dx} = 4e^{\sin X} \times \ \cos x$$

7) $y = (9X^2 - 6X + 2)e^{3X}$

$$\frac{dy}{dx} = 3(9x^2 - 6x + 2)e^{3X} + e^{3x}(18x - 6)$$

$$= 3e^{3x}[(9x^2 - 6x + 2) + (18x - 6)]$$

8) $y = \left(\frac{X+1}{X-1}\right)^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left[\frac{(x+1)}{(x-1)}\right]\left(\frac{(x-1)\times(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}\right)$$

$$= 2\left[\frac{(x+1)}{(x-1)}\right]\left[\frac{(x-1-x-1)}{(x-1)^2}\right] = 2\left[\frac{(x+1)}{(x-1)}\right]\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right] = \left[\frac{-4x-4}{(x-1)^3}\right]$$

9) $y = (5x^3 + 3x^2 - 2x)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3\ (5x^3 + 3x^2 - 2x)^2(15x^2 + 6x - 2)$$

10) $y = \cos 5x\sin 5x$

$$\frac{dy}{dx} = 5\cos 5x\cos 5x + 5\sin 5x\,(-\sin 5x) = 5\cos^2 5x - 5\sin^2 5x = 5\cos 10x$$

11) $y = \frac{(x+2)^2}{(x-2)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)2(x+2)-(x+2)^2(1)}{(x-2)^2} = \frac{2x+4}{x-2} - \left[\frac{(x+2)}{(x-2)}\right]^2$$

12) $y = \ln(x^3 + 3x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+3}{x^3+3x}$

$$(13) \qquad y = \ln(3x^2+5x-4) \quad \dots\dots\dots \frac{dy}{dx} = \frac{6x+5}{3x^2+5x-4}$$

$$(14) \qquad y = \log(3x^2+4) \qquad \dots . \frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{(3x^2+4)} 6x = \frac{6x}{(3x^2+4)} \log e$$

$$(15) \qquad y = 3^{\sin 2x} \qquad \dots . . \frac{dy}{dx} = 3^{\sin 2x} \ln 3 \ (2\cos 2x)$$

$$(16) \qquad y = (x^2+4)^{\cos 3x} \qquad \dots, u = x^2+4 \quad , \quad v = \cos 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 3x \ (x^2+4)^{(\cos 3x)-1} (2x) + \ln(x^2+4) \ (x^2+4)^{\cos 3x} \ -3 \sin 3x$$

$$(17) \qquad y = e^{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$$

$$(18) \qquad y = e^{\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \ e^{\sin x} \cos x$$

$$(19) \qquad y = \ e^{\sqrt{3x^2+5}}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{3x^2+5}} \left(\frac{1}{2}\right) (3x^2+5)^{-\frac{1}{2}} (6x)$$

$$(20) \qquad y = e^{2x+1}$$

$$. \frac{dy}{dx} = 2 \ \ e^{2x+1}$$

$$(21) \qquad y = \ e^{\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$$

(22) $$y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(e^{x}-e^{-x})}{2}$$

(23) $$y=e^{\ln x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\ln x}}{x}$$

(24) $$y=x^{2}e^{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{2}e^{x}+e^{x}(2x)=e^{x}(x^{2}+2x)$$

(25) $$y=\sqrt{x-1}\;\;e^{\sqrt{x-1}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\sqrt{x-1})\;\;e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}}+\frac{e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}}=\frac{(\sqrt{x-1}\;+1)\;\;e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}}$$

مثال 26/ إذا كانت $y=\frac{3x+1}{(x-1)^2}$ فاثبت أن $(x-1)^2\frac{d^2y}{dx^2}+4(x-1)\frac{dy}{dx}+2y=0.0$

الحل :- نوجد المشتقة الأولى والثانية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)^2(3)-(3x+1)\times 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(3x-3)-(6x+2)}{(x-1)^3}=\frac{(-3x-5)}{(x-1)^3}=$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x-1)^3(-3)-(-3x-5)\times 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{(x-1)(-3)-3(-3x-5)}{(x-1)^4}=\frac{-3x+3+9x+15}{(x-1)^4}=\frac{6x+18}{(x-1)^4}$$

نعوض المشتقة الأولى والثانية في السؤال

$$(X-1)^2\frac{6x+18}{(x-1)^4}+4(x-1)\frac{(-3x-5)}{(x-1)^3}+2\frac{3x+1}{(x-1)^2}=\frac{6x+18}{(x-1)^2}+\frac{(-12x-20)}{(x-1)^2}+\frac{6x+2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{6x+18-12x-20+\;6x+2}{(x-1)^2}=\frac{0.0}{(x-1)^2}=0.0$$

قاعدة السلسلة (التفاضل بطريقة السلسلة)

مثال – :اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلات التالية

$$y = 3u^2 + 1 \quad , \quad u = 2x - 3$$

الحل / نوجد $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$ وكما يلي

$$\frac{dy}{du} = 6u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 6u(2) = 12u$$

$$\frac{dy}{dx} = 12(2x - 3) = 24x - 36$$

مثال – :اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلات التالية

$$y = u - 2u^2 \quad , \quad u = 3x^2 - 7$$

الحل / نوجد $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$ وكما يلي

$$\frac{dy}{du} = 1 - 4u \quad : \quad \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (1 - 4u)6x = 6x - 24xu = 6x - 24x(3x^2 - 7)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 72x^2 + 168x = -72x^2 + 17x$$

مثال – :اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلات التالية

$$y = t^2 + 2t \qquad , \qquad x = 1 - 2t$$

الحل / نوجد $\frac{dy}{dt}$ و $\frac{dx}{dt}$ وكما يلي

$$\frac{dy}{dt} = 2t + 2 \qquad : \frac{dx}{dt} = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{2t+2}{-2} = -t - 1$$

مثال –: اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلات التالية

1) $y = t^2 - 2t \quad , \quad t = 4 + x^2$

2) $y = \sqrt{t} \quad , \quad t = 1 + \frac{1}{x}$

3) $y = \frac{u}{u+1} \quad , \quad u = x^2 + 1$

4) $y = 3u^2 + 4 \quad , \quad u = 3x + 2$

5) $y = \frac{1}{t+1} \quad , \quad x = \frac{1}{t+1}$

الاشتقاق الضمني

مثال –: اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلة $x^2 + 2xy = 4$

الحل / نوجد y بدلالة x تم نكمل التفاضل المعتاد وكما يلي

$$y=\frac{4-x^2}{2x}=\frac{2}{x}-\frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(0)-2(1)}{x^2}-\left[\frac{2(1)-x(0)}{4}\right]=\frac{-2}{x^2}-\frac{1}{2}=$$

اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للدالة $f(x)=\ \ y^4-xy^2+x^2-7\ =0$

في هذه الحالة يتعذر إيجاد y بدلالة x ولأجله سنوضح طريقة المفاضلة الضمنية لكي نجد $\frac{dy}{dx}$ وهي كما يأتي

نفاضل كل حد بالنسبة إلى (x) وفق قوانين التفاضل السابقة فنحصل على

$$4y^3\frac{dy}{dx}-\left(x2y\frac{dy}{dx}+y^2(1)\right)+2x-0=0$$

$$4y^3\frac{dy}{dx}-2xy\frac{dy}{dx}=y^2-2x$$

$$\frac{dy}{dx}(4y^3-2xy)=y^2-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2x}{4y^3-2xy}$$

اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للدالة $f(x)=\ \ x^3+x^2y-10y^4=0$

الحل :- نشتق المعالة بالاشتقاق الضمني

$$3x^2+x^2\frac{dy}{dx}+2yx-40y^3\frac{dy}{dx}=0$$

$$x^2\frac{dy}{dx}-40y^3\frac{dy}{dx}=-3x^2-2yx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2-2yx}{x^2-40y^3}=$$

جد معادلة المماس للقطع الزائد $4x^2-9y^2=36$ في النقطة $(6\ \ ,2\sqrt{3})$

الحل :- نشتق المعادلة بالاشتقاق الضمني

$$8x-18y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x}{18y}=\frac{4x}{9y}$$

بتعويض قيمة $x\ ,y$ نحصل على

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{3\sqrt{3}}=M=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{ميل المماس}$$

$$(y_2-y_1)=M(x_2-x_1)$$

$$y-2\sqrt{3}=\frac{4}{3\sqrt{3}}(x-6)=\frac{4}{3\sqrt{3}}x-\frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{3\sqrt{3}}x+2\sqrt{3}\ \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)-\frac{8}{\sqrt{3}}-y=\frac{4}{3\sqrt{3}}x+\frac{6-8}{\sqrt{3}}-y=\frac{4}{3\sqrt{3}}x-y+\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)=0.0$$

$4x-3\sqrt{3}y-6=0.0$ ……… $3\sqrt{3}$ × بالضرب

$4x-3\sqrt{3}\,y-6=0$ …………….. معادلة المماس هي ∴

جد معادلة مماس الدائرة $x^2+y^2=25$ عند النقطة $(-3\ ,\ 4)$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0.0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{-3}{4}=\frac{3}{4}$ …………… ميل المماس

$$M=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-4=M(x—3)=\frac{3}{4}(x+3)$$

$4y-16=3x+9$ ………………… بضرب المعادلة × 4

$3x-4y=25$ ……………….. معادلة المماس هي ∴

اوجد المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ للدالة $y^2=2x^3$

الحل / نوجد المشتقة الاولى $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{y}$ ∴, $2y\frac{dy}{dx}=6x^2$

نوجد المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ للدالة $2y\frac{d^2y}{dx^2}+\ 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=12x$

$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=6x$ ……………………………….. بالقسمة على (2)

$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{3x^2}{y}\right)^2=6x$ …………….. نعوض قيمة $\frac{dy}{dx}$ في المعادلة

$$\frac{D^2y}{dx^2}=\frac{6x-\left(\frac{3x^2}{y}\right)^2}{y}=\frac{\frac{6xy^2-9x^4}{y^2}}{y}=\frac{6xy^2-9x^4}{y^3}$$

$$\frac{D^2y}{dx^2}=\frac{6x(2x^3)-9x^4}{2x^3y}=\frac{12x^4-9x^4}{2x^3y}=\frac{3x}{2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y*6x-3x^2\frac{dy}{dx}}{y^2}=\frac{y*6x-3x^2\left(\frac{3x^2}{y}\right)}{y^2}=\frac{y*6x-\frac{9x^4}{y}}{2x^3}=\frac{\frac{y^2 6x-9x^4}{y}}{2x^3}=\frac{2x^3 6x-9x^4}{2yx^3}$$

$$\frac{12x^4-9x^4}{2x^3y}=\frac{3x}{2y}$$

---

the critical points of function

the largest critical point and smallest critical point

$Ex{:}-find\ the\ largest\ \ and\ \ smallest\ critical\ point\ \ of\ the\ function\quad f(x)=x^4-2x^2+2$

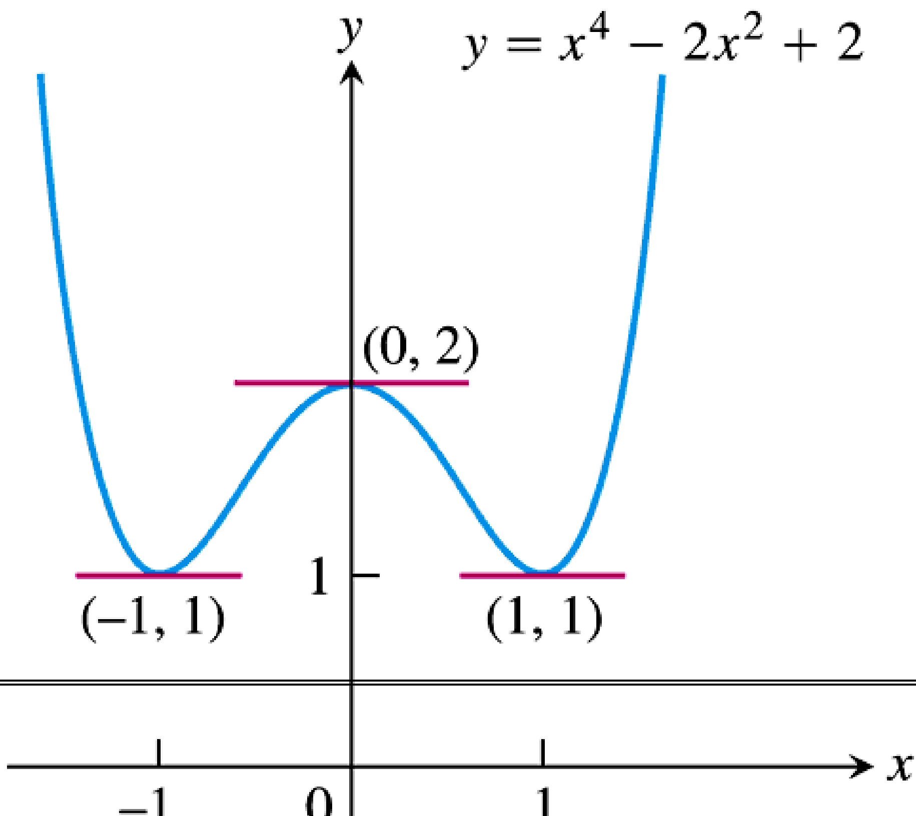
$solution{:}-\frac{dy}{dx}=4x^3-4x=4x(x^2-1)=0$

اما $\quad 4x=0 \quad , \quad \therefore \quad x=0$ ،

او $\quad x^2-1=0 \quad , \quad \therefore \quad x=\pm 1$ ،

$\therefore$ *largest critical point* at $x=0$

and smallest critical point at $x=\pm 1$



$Ex{:}-find\ the\ largest\ \ and\ \ smallest\ critical\ point\ \ of\ the\ function\quad y=x^3-12x-5$

.

$solution{:}-\frac{dy}{dx}=3x^2-12=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(x^2)=4\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x=\pm 2$

‘ $\therefore$ $largest\ critical\quad point\quad at\quad x=-2$,

‘ $and\ \ smallest\ critical\ point\quad at\quad x=2$,

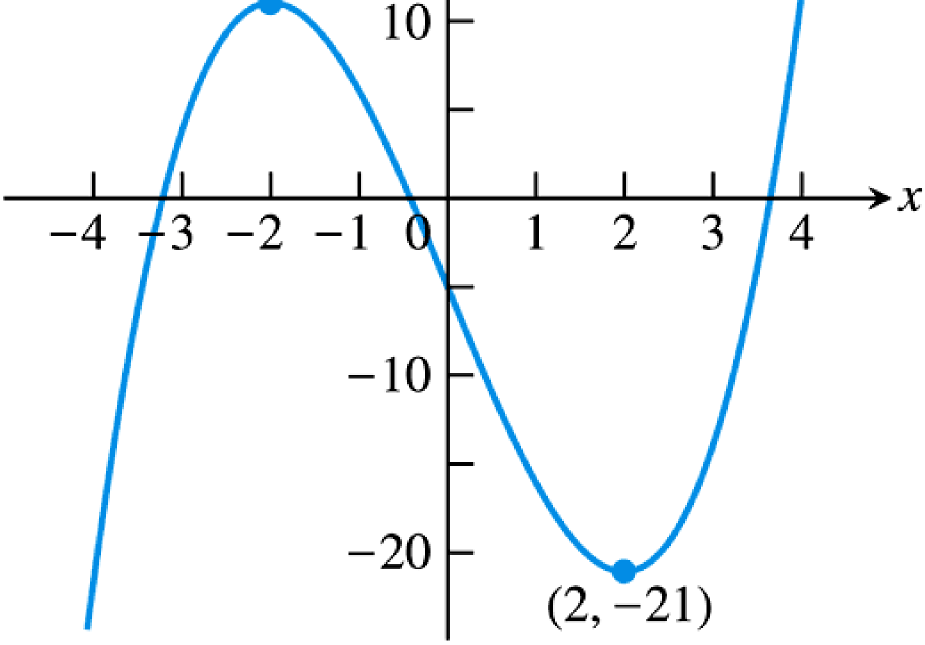


FIGURE 4.21 The function $f(x) = x^3 - 12x - 5$ is monotonic on three separate intervals (Example 1).

$Ex:-find\ the\ largest\ \ and\ \ smallest\ critical\ point\ \ of\ the\ function$

$f(x) = y = \cos x \quad on \quad [-\pi \ , \quad \pi]$

$solution:-\dfrac{dy}{dx} = -\sin x = 0$

$-\sin x = 0 \quad , \quad \therefore \ x = 0$ اما

$-\sin x = 0 \quad , \quad \therefore \ x = \pm\pi$ او

، $\therefore \quad largest\ critical \quad point \quad at \quad x = 0$

، $and \quad smallest\ critical\ point \quad at \quad x = \pm\pi$

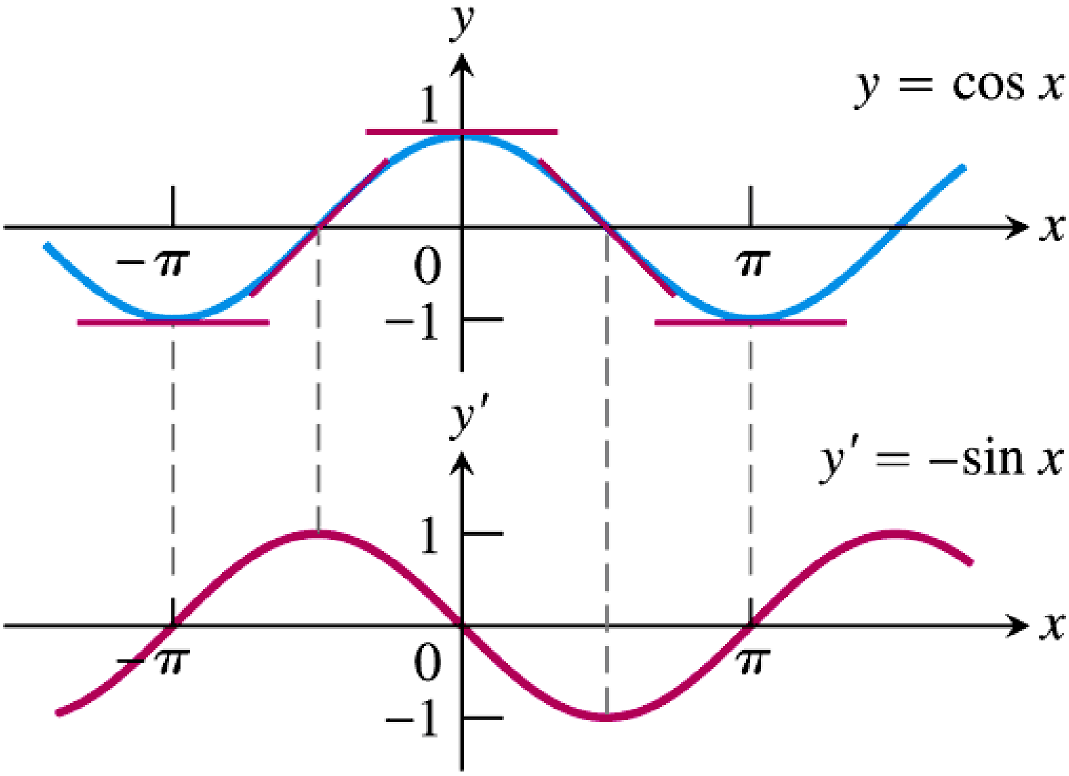
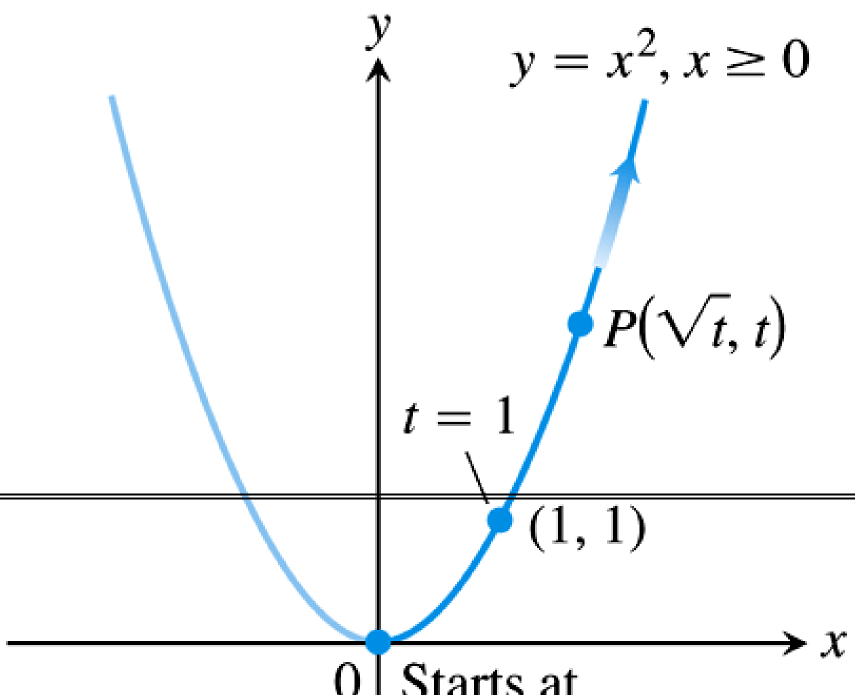


FIGURE 3.17 The curve $y' = -\sin x$ as the graph of the slopes of the tangents to the curve $y = \cos x$.

Ex: $-$ *find the critical point of the function* $y = x^2$ *on* $[-2 \quad , \ 2]$

solution: $-\dfrac{dy}{dx} = 2x = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \therefore x = 0$

smallest critical point *at* $x = 0$

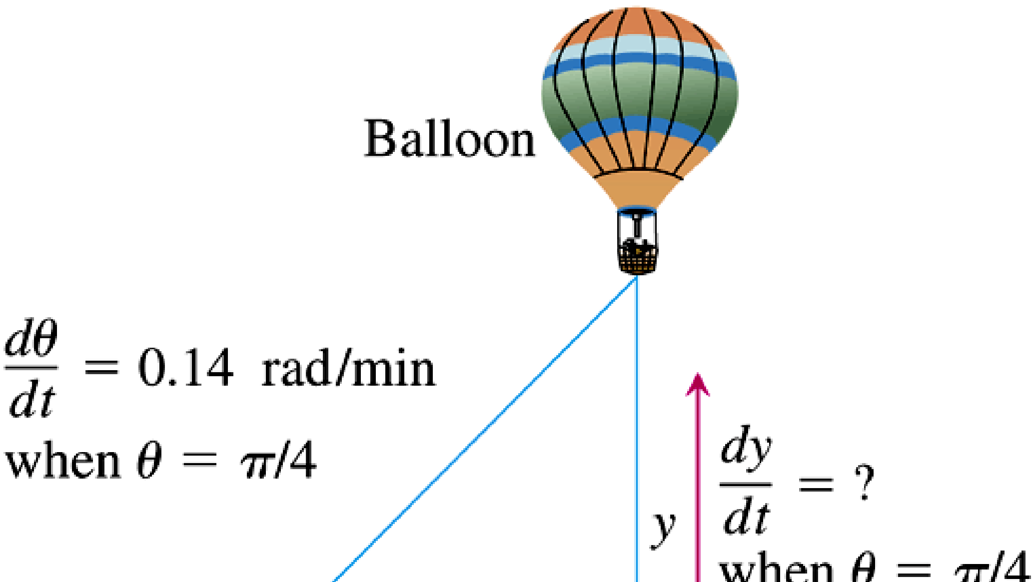


جد القيمة العظمى والصغرى للدالة $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$ للفترة المغلقة $(-3\ \ ,3)$

$solution{:}-\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x-1)(x+2) = 0$

$(x-1) = 0 \quad , \ x = 1$ اما

$x + 2 = 0 \quad , \quad x = -2$



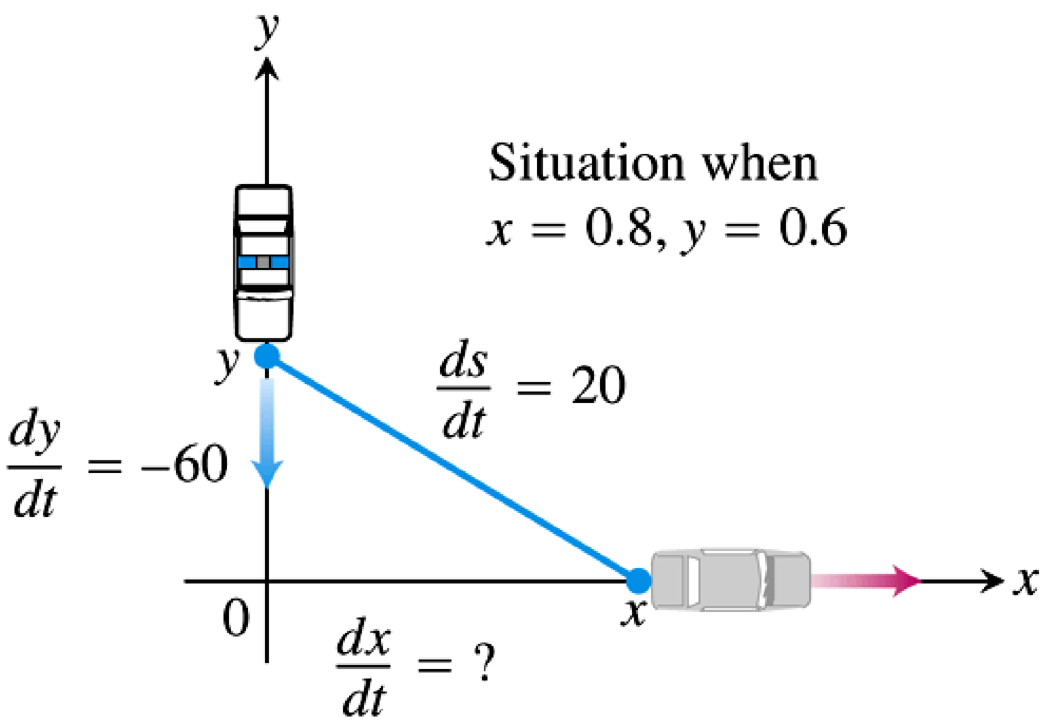


FIGURE 3.30 The speed of the car is related to the speed of the police cruiser

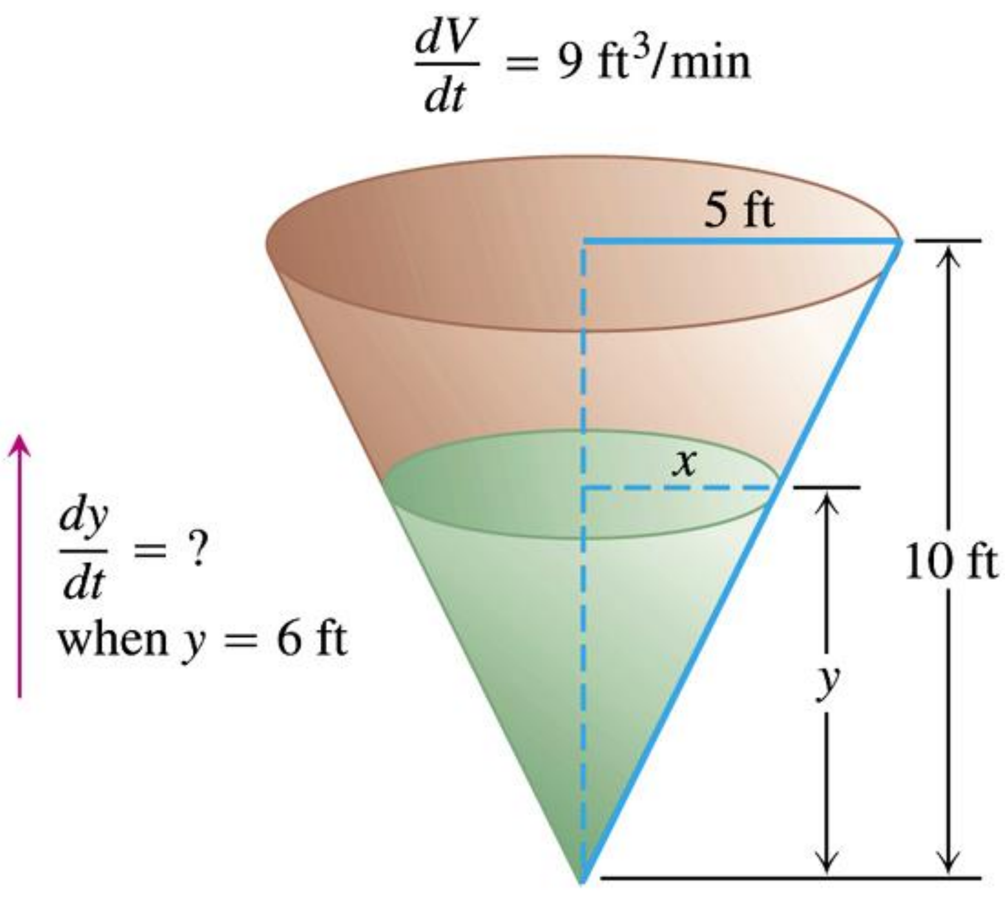


FIGURE 3.31 The geometry of the conical tank and the rate at which water

بعض التطبيقات على النقاط الحرجة

مثال /١

احسب مساحة اكبر مثلث يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها يساوي (6cm) .

الحل :-

نفرض أن طول قاعدة المثلث = $2x$

نفرض أن ارتفاع المثلث = L

مساحة المثلث = نصف القاعدة الارتفاع

$A = x\ L$

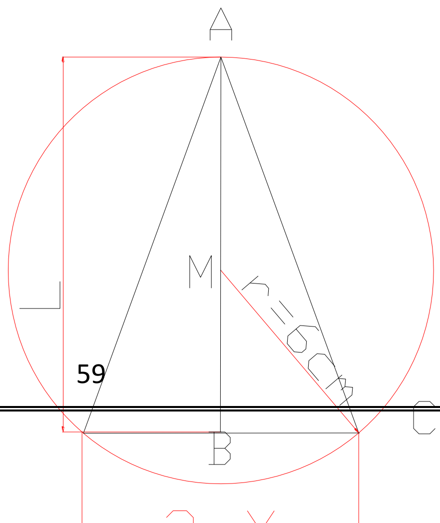
في المثلث MBC

$x^2 + (L-6)^2 = 36$

$x^2 + L^2 - 12L + 36 = 36$

$x^2 = 12L - L^2$

$A^2 = x^2 \times L^2$

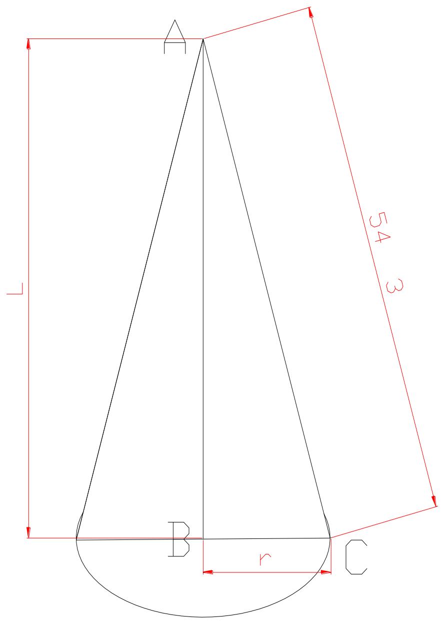


$$A^2 = (12L - L^2) \times L^2$$
$$A^2 = 12L^3 - L^4$$
$$2A\frac{dA}{dL} = 36\mathrm{L}^2 - 4\mathrm{L}^3 = 0.0$$
$$36L^2 = 4L^3$$
$$\therefore L = 9\ Cm$$
$$x^2 = 12 \times 9 - 81$$
$$x = 3\sqrt{3}$$
$$A = 3\sqrt{3} \times 9 = 27\sqrt{3}\ (Cm)^2$$

مثال / ٢ :-

مخروط طول مولده $54\sqrt{3}$ اوجد ارتفاع المخروط لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن .

الحل /



في المثلث ABC

$$L^2 + r^2 = (54\sqrt{3})^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$
$$Volume = V = \frac{\pi}{3} r^2 L$$
$$r^2 = (54\sqrt{3})^2 - L^2 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$ من معادلة
$$V = \frac{\pi}{3}\left[(54\sqrt{3})^2 - L^2\right] \times L$$
$$V = \frac{\pi}{3}\left[(54\sqrt{3})^2 L - L^3\right]$$
$$\frac{dV}{dL} = \frac{\pi}{3}\left[(54\sqrt{3})^2 - 3L^2\right]$$
$$\frac{dV}{dL} = \frac{\pi}{3}[(54)^2 \times 3 - 3L^2]$$

$$\frac{dV}{dL} = \pi(54)^2 - \pi L^2 = 0.0$$

$$L^2 = (54)^2$$

$$\therefore L = 54 \quad Cm$$

$$r^2 = (54)^2 \times 3 - (54)^2$$

$$r^2 = 2 \times (54)^2$$

$$\therefore Volume = \frac{\pi}{3} \times 2 \times (54)^2 \times (54) = \frac{2\pi}{3}(54)^3 \ (Cm)^3$$

مثال/ ٣ :- جد أبعاد اكبر اسطوانة قائمة يمكن وضعها داخل كرة مجوفة نصف قطرها $(3\sqrt{3}\ \mathrm{Cm})$ ثم جد نسبة حجم الاسطوانة إلى حجم الكرة .

الحل :-

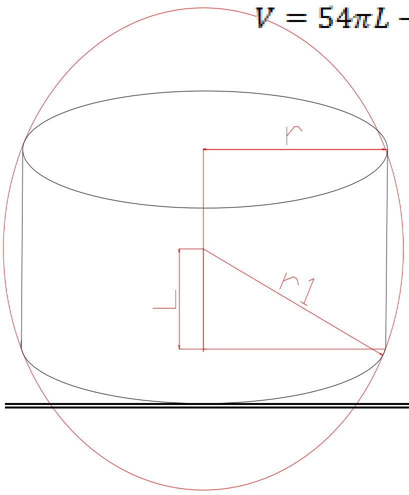
نفرض نصف قطر الاسطوانة (r) . ونصف قطر الكرة (r_1) . وارتفاع الاسطوانة $(2L)$

حجم الاسطوانة $\quad Volume\ of\ Cyilinder = V = r^2 \times 2L \times \pi \dots\dots\dots (1)$

$$\left(3\sqrt{3}\right)^2 = r^2 + L^2 = 27 \dots\dots (2)$$

بالتعويض في معادلة $\quad V = 2\pi L(27 - L^2) \quad \dots\dots\dots (1)$

$$V = 54\pi L - 2\pi L^3$$



$$\frac{dV}{dL} = 54\pi - 6\pi L^2 = 0.0$$

$$\therefore 6\pi(9 - L^2) = 0.0$$

$$\therefore L^2 = 9$$

$$\therefore L = 3\ Cm$$

ارتفاع الاسطوانة $\quad 2L = 6\ Cm$

$\therefore r^2 = 27 - 9 = 18$

$\therefore r = 3\sqrt{2}\ Cm$

$V = 18 \times 6 \times \pi\ \ (Cm)^3$

$V_1 = \frac{4}{3} {r_1}^3 \pi = \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}\right)^3 \pi = \frac{4}{3} \times 81\sqrt{3}\ \times \pi\ (Cm)^3$

$\frac{V}{V_1} = \frac{18 \times 6 \times 3}{4 \times 81\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

مثال / ٤ :- خزان وقود على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها ، فإذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $(108)M^2$. جد أبعاد الخزان ليكون حجمه اكبر ما يمكن علما أن الخزان ذو غطاء كامل .

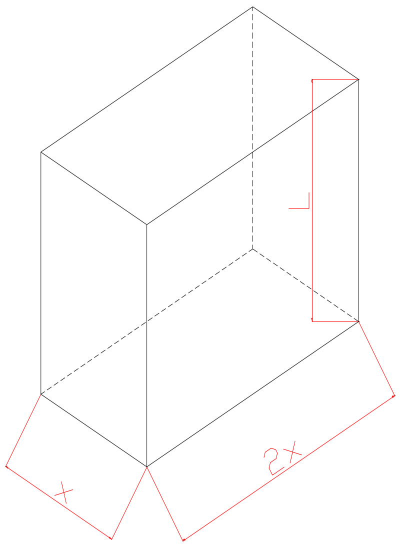
الحل :-

نفرض طول الخزان $2x$ ، وعرضه x ، وارتفاعه L

المساحة السطحية للخزان $A = 6xL + 4(x)^2 = 108 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

حجم الخزان $V = 2x^2 L \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

من معادلة (١) $L = \frac{108 - 4x^2}{6x}$



$V = 2x^2\left[\frac{108 - 4x^2}{6x}\right] = \frac{108x - 4x^3}{3} =$

$V = 36\ x - \frac{4}{3}x^3$

$\frac{dV}{dx} = 36 - 4x^2 = 0.0$

$\therefore 4x^2 = 36$

$\therefore x = 3\ M$

$L = \frac{108 - 36}{18} = 4\ M$

إذن إبعاد الخزان هي

الطول $2x = 6\ M$

العرض $x = 3M$

الارتفاع $L =\ $ ٤M

حجم الخزان $V = 2(9) \times 4 = \ \ 72\ M^3$

Integration (التكامل)

TABLE 8.1 Basic integration formulas

1. $\int du = u + C$	12. $\int \tan u\, du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$
2. $\int k\, du = ku + C \quad$ (any number k)	13. $\int \cot u\, du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$	14. $\int e^u\, du = e^u + C$
4. $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	15. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	16. $\int \sinh u\, du = \cosh u + C$
6. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$	17. $\int \cosh u\, du = \sinh u + C$
7. $\int \cos u\, du = \sin u + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
8. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$	19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
9. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$	20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left\lvert\frac{u}{a}\right\rvert + C$
10. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$	21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (a > 0)$
11. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$	22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (u > a > 0)$

1) $\int u^n\, du = \left[\frac{(u)^{n+1}}{(n+1)}\right] + c$

2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

3) $\int e^u du = e^u + c$

4) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

5) $\int \sin u\ du = -\cos u + c$

6) $\int \cos u\ du = \sin u + c$

7) $\int \sec u \tan u\ du = \sec u + c$

8) $\int \csc u \cot u\ du = -\csc u + c$

9) $\int \sin^2 u\, du = \frac{1}{2}\left[u - \frac{1}{2}\sin 2u\right] + c$

10) $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\left[u + \frac{1}{2}\sin 2u\right] + c$

11) $\int \sec^2 u\, du = \tan u + c$

12) $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + c$

13) $\int \frac{\log e}{u} du = \log u + c$

14) $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln|a|} + c$ (عدد حقيقي a)

15) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}u + c = -\cos^{-1}u + c$, $|u| < 1$

16) $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}u + c = -\cot^{-1}u + c$

17) $\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}u + c = -\csc^{-1}u + c$, $|u| > 1$

---

find the integration of the following functions

1) $\int 7x dx = \frac{7}{2}x^2 + c$

2) $\int 4x^3\,dx = \frac{4}{4}x^4 + c = x^4 + c$

3) $\int 15dx = 15x + c$

4) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$

5) $\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + c$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c$

7) $\int (x+1)\,dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 + c$

8) $\int \frac{x^3-2x^2+1}{7x^5}\,dx = \int \left[\frac{1}{7x^2} - \frac{2}{7x^3} + \frac{1}{7x^5}\right] dx$

$= -\frac{1}{7x} + \frac{1}{7x^2} - \frac{1}{28x^4} + c = \frac{-4x^3+4x^2+1}{28x^4} + c$

9) $\int \left(\sqrt{3x} + 5\right) dx = \frac{2}{\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}} + 5x + c$

10) $\int (3x^2 - 2x + 1)\,dx = x^3 - x^2 + x + c$

11) $\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1\times 2}{2\times 3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$

12) $\int \left(\frac{1}{x^2} + x\right) dx = \int (x^{-2} + x)\,dx = -x^{-1} + \frac{x^2}{2} + c = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$

13) $\int x^2\sqrt{7x^3+5}\;dx = \int x^2\,(7x^3+5)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{21}\int 21x^2\,(7x^3+5)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{1}{21} \times \frac{2}{3}(7x^3+5)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{63}(7x^3+5)^{\frac{3}{2}} + c$

14) $\int \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

15) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$

16) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$

17) $\int \sec^3 3x \tan 3x \, dx = \frac{1}{3}\int \sec^2 3x \tan 3x \sec 3x \; 3\, dx$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \sec^3 3x + c = \frac{1}{9} \sec^3 3x + c$

18) $\int \cos 5x \, dx = \frac{1}{5} \sin 5x + c$

19) $\int \sin^3 6x \cos 6x \, dx = \frac{1}{6}\int \sin^3 6x \cos 6x \, 6dx = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \sin^4 6x + c$

20) $\int \cos\frac{1}{3}x \sin\frac{1}{3}x \, dx = 3\int \cos\frac{1}{3}x \sin\frac{1}{3}x \frac{1}{3} dx = \frac{3}{2}\sin^2 \frac{1}{3}x + c$

21) $\int \frac{4x}{2x^2+1} dx = ln(2x^2+1) + c$

22) $\int \frac{(x+1)}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} ln(x^2+2x+2) + c$

23) $\int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+3} dx = \frac{1}{2} ln(2x+3) + c$

24) $\int \frac{\sin x}{2-\cos x} dx = ln(2-\cos x) + c$

25) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln \cos x + c$

26) $\int \tan^2 3y \, dy = \int (\sec^2 3y - 1)\, dy$

$= \frac{1}{3}\int \sec^2 3y \; 3\, dy - \int dy = \frac{1}{3} \tan 3y - y + c$

27) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

$= \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x)\, dx = \int (1 + \sin 2x)\, dx$

$= x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$

28) $\int \cos^2(3x^2+5) \times \sin(3x^2+5) dx \quad = \frac{\cos^3(3x^2+5)}{18} + c$

التكامل بطريقة تجزئة الكسور

1) $\int \frac{(5x+3)}{x^3-2x^2-3x} dx = \int \frac{(5x+3)}{x(x-2x-3)} dx = \int \frac{(5x+3)}{x(x+1)(x-3)} dx$

$\frac{(5x+3)}{x(x+1)(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{k}{x-3} = \frac{a(x+1)(x-3)+bx(x-3)+kx(x+1)}{x(x+1)(x-3)}$

$= \frac{ax^2-3ax+ax-3a+bx^2-3bx+kx^2+kx}{x(x+1)(x-3)} = \frac{(5x+3)}{x(x+1)(x-3)}$

$ax^2 - 3ax + ax - 3a + bx^2 - 3bx + kx^2 + kx = (5x+3)$

$-3a = 3$

$-2a - 3b + k = 5$

$a + b + k = 0$

$a = -1 \quad : \quad b = -\frac{1}{2} \quad : \quad k = \frac{3}{2}$

$\int \frac{(5x+3)}{x(x+1)(x-3)} dx = \int \left[\frac{-1}{x} + \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x-3)}\right] dx =$

$-\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{3}{2}\ln(x-3) + c$

2) $\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} dx =$

$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{a}{(x+3)} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{k}{(x-1)^2} =$

$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2+b(x+3)(x-1)+k(x+3)}{(x+3)(x-1)^2} =$

$= \frac{a(x-1)^2+b(x+3)(x-1)+k(x+3)}{(x+3)(x-1)^2}$

$= \frac{ax^2-2ax+a+bx^2+2bx-3b+kx+3k}{(x+3)(x-1)^2} =$

$a+b=3$

$2a-2b-k=8$

$a-3b+3k=13$

$a=3-b$

$2(3-b)-2b-k=8=6-4b-k$

$k=-2-4b$

$(3-b)-3b+3(-2-4b)=13$

$-16b=16$

$a=4 \qquad : b=-1 \qquad : \quad k=2$

$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} dx = \int \frac{4}{(x+3)} dx + \int \frac{-1}{(x-1)} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx =$

$= 4\ln(x+3) - ln(x-1) - 2(x-1)^{-1} + c$

التكامل بالتعويض

مثال/1 اوجد التكامل التالي $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

الحل :- نفرض $u=\sqrt{x}$ ثم نوجد المشتقة $\frac{du}{dx}$ والتي تساوي $du = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

ثم نعوض قيمة du , u في المعادلة الأصلية فتكون

$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \sin u\ du = -2\ \cos u\ du + c = -2\cos\sqrt{x} + c$

مثال/2 اوجد التكامل التالي $\int \frac{\sec^2(\sin x)}{\sec x} dx$

الحل :- نفرض $u = \sin x$ ثم نوجد المشتقة $\frac{du}{dx}$ والتي تساوي $du = \cos x\, dx$

ثم نعوض قيمة du , u في المعادلة الأصلية فتكون

$$\int \frac{\sec^2(\sin x)}{\sec x} dx = \int \sec^2(\sin x) \cos x\, dx = \int \sec^2(u)\, du$$

$$= \tan u + c = \tan(\sin x) + c$$

مثال/3 اوجد التكامل التالي $\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx$

الحل :- نفرض $u = a^2 - x^2$ ثم نوجد المشتقة $\frac{du}{dx}$ والتي تساوي $du = -2x dx$

ثم نعوض قيمة du , u في المعادلة الأصلية فتكون

$$\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln u + c =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(a^2 - x^2) + c$$

التكامل بالتجزئة

ويستند على عكس صيغة اشتقاق حاصل ضرب دالتين وكما مبين .

لتكن(v , u) دالتين لـ (x) تعرف مشتقتان مستمرتان لهما

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

نحصل على (x)وبتكامل كلا الطرفين لهذه المعادلة بالنسبة الى

$$u\, v = \left(\int u\, dv + \int v\, du \right)$$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

وهذه تعرف بصيغة التكامل بالتجزئة

مثال/1 اوجد التكامل التالي $\int x \cos x\, dx$

نفرض $dv = \cos x dx$, $u = x$ ثم نوجد du , v وكما يلي

$v = \sin x$

$du = dx$

وباستخدام قانون التكامل بالتعويض

$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$

$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx$

$= x \sin x + \cos x + c$

مثال/2 اوجد التكامل التالي $\int x^2 \cos x\, dx$

نفرض $dv = \cos x dx$, $u = x^2$ ثم نوجد du , v وكما يلي

$v = \sin x$

$du = 2x dx$

وباستخدام قانون التكامل بالتعويض

$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$

$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx$ .... (1)

وبما أن الحد الثاني هو تكامل دالتين فنطبق القانون مرة أخرى

$\int 2x \sin x\, dx =$

نفرض $dv = \sin x\, dx$, $u = 2x$ ثم نوجد du , v وكما يلي

$v = -\cos x$

$du = 2dx$

$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$

$\int 2x \sin x\, dx = 2x(-\cos x) - \int -\cos x\, 2dx$

$= -2x \cos x + 2 \sin x$ .... (2)

ثم نعوض معادلة (٢) في معادلة رقم (١) فنحصل على

$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - (-2x \cos x + 2 \sin x)$

$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$

مثال/3 اوجد التكامل التالي $\int x^2 \sin x\, dx$

نفرض $dv = \sin x dx$, $u = x^2$ ثم نوجد du , v وكما يلي

$v = -\cos x$

$du = 2x dx$

وباستخدام قانون التكامل بالتعويض

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = x^2(-\cos x) - \int(-\cos x)2x\, dx \quad \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

وبما أن الحد الثاني هو تكامل دالتين فنطبق القانون مرة أخرى

$$\int -2x \cos x\, dx =$$

نفرض $dv = -\cos x\, dx$, $u = 2x$ ثم نوجد du , v وكما يلي

$v = -\sin x$

$du = 2dx$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int -2x \cos x\, dx = 2x(-\sin x) - \int(-\sin x)2dx$$

$$= -2x \sin x - 2\cos x \quad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

ثم نعوض معادلة (٢) في معادلة رقم (١) فنحصل على

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x - \int -2x \cos x\, dx$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

==================================

واجب / اوجد التكاملات التالية

1) $\int x \sin 3x\, dx$

$= -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c$

2) $\int t^3 \sin t^2\, dt$

$= \frac{1}{2}[\sin t^2 - t^2 \cos t^2] + c$

3) $\int x\sqrt{x+1}dx$

$= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c$

بعض المتطابقات المثلثية المستخدمة في التكاملات

1) $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$

2) $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$

3) $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$

مثال/1 اوجد التكامل التالي $\int \sin 6x \sin x \, dx$

الحل/ باستخدام المتطابقة $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$

$$\sin x \sin 6x = \frac{1}{2}[\cos(6-1)x - \cos(6+1)x]$$

$$\sin x \sin 6x = \frac{1}{2}[\cos(5x) - \cos(7x)]$$

$$\int \sin x \sin 6x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos(5x)\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(7x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\sin(5x) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}\sin 7x + c$$

$$= \frac{1}{10}\sin(5x) - \frac{1}{14}\sin 7x + c$$

مثال/2 اوجد التكامل التالي $\int \cos 3x \cos x \, dx$

الحل / باستخدام المتطابقة الملائمة

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$

$$\cos 3x \cos x = \frac{1}{2}[\cos(3-1)x + \cos(3+1)x]$$

$$\int \cos 3x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

مثال/3 اوجد التكامل التالي $\int \cos^3 2x \, dx$

الحل /

$$\int \cos^3 2x \, dx = \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx = \int (1 - \sin^2 2x)\cos 2x \, dx$$

$$= \int \cos 2x \, dx - \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + c$$

مثال/4 اوجد التكامل التالي $\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$

الحل /

$$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx = \int \cos x \cos^2 x \sin^2 x \, dx$$

نفرض ان $du = \cos x \, dx$, $u = \sin x$ نحصل على

$$\int (1 - \sin^2 x)\sin^2 x \cos x \, dx = \int (1 - u^2)u^2 \, du$$

$$= \int (u^2 - u^4)\, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

تطبيقات التكامل

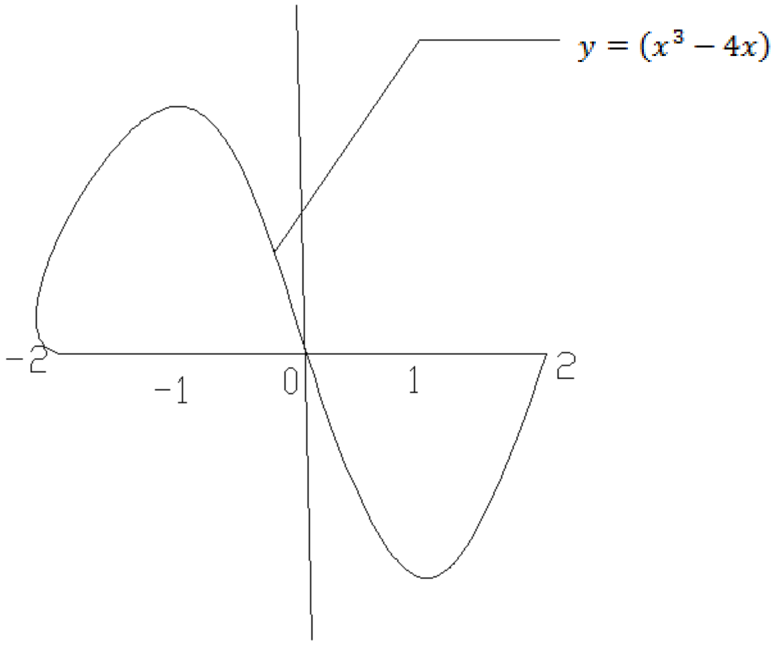
مثال 1/ :—اوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y=(x^3-4x)$ ومحور السينات (

الحل / نوجد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات حيث $y=0$ (

$$x^3-4x=0= \quad x(x+2)(x-2)=0$$

∴ نقاط التقاطع هي $(2\ ,\ 0)$: $(0\ ,\ 0)$: $(-2,\ 0)$

وتكون y موجبة في الفترة $(-2,\ 0)$ وسالبة في الفترة $(0,\ 2)$ كما في الشكل



$$Area_{-2}^{2}=Area_1-Area_2$$

$$\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx-\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx=$$

$$=\left(\tfrac{1}{4}x^4-2x^2\right)\Big]_{-2}^{0}-\left(\tfrac{1}{4}x^4-2x^2\right)\Big]_{0}^{2}=0-(4-8)-[(4-8)-0]=$$

$$=4+4=8$$

مثال 2/ :—اوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $(y=2-x^2)$ والخط المستقيم $(y=-x)$

الحل / نحدد نقاط تقاطع المنحنيين بحل معادلتيهما آنيا حيث $y=0$ (

$\therefore 2-x^2=-x$

$x^2-x-2=0=(x+1)(x-2)=0$

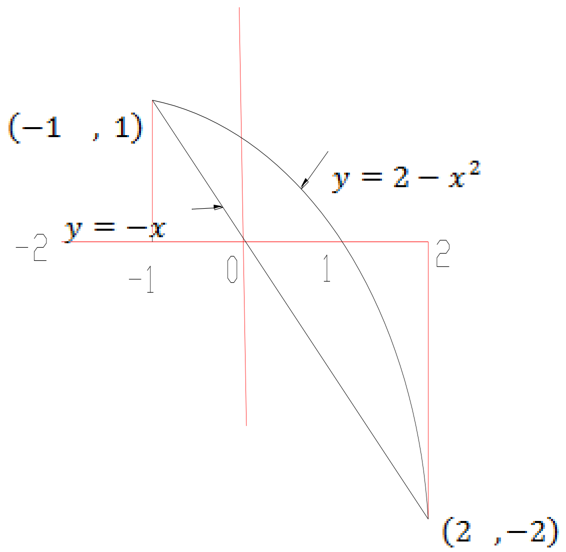
اما $\therefore x=-1 \quad , \quad x=2$

او $\therefore y=1 \quad , y=-2$

$\therefore$ نقطتي التقاطع هما $(-1 \;, \; 1)$ و $(2 \;, -2)$

ثم نرسم المنحنيين بتعويض قيمة $(2>x>-1)$ لتحديد المنحنى الاعلى كما في الشكل

ويكون المنحنى $(y=2-x^2)$ اعلى من الخط المستقيم $(y=-x)$



$\therefore y_1-y_2=(2-x^2)-x=2-x^2+x$

$Area_{-1}^{2}=\int_{-1}^{2}(2-x^2+x)\,dx=$

$=\left(2x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big]_{-1}^{2}=\left(4-\frac{8}{3}+2\right)-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=$

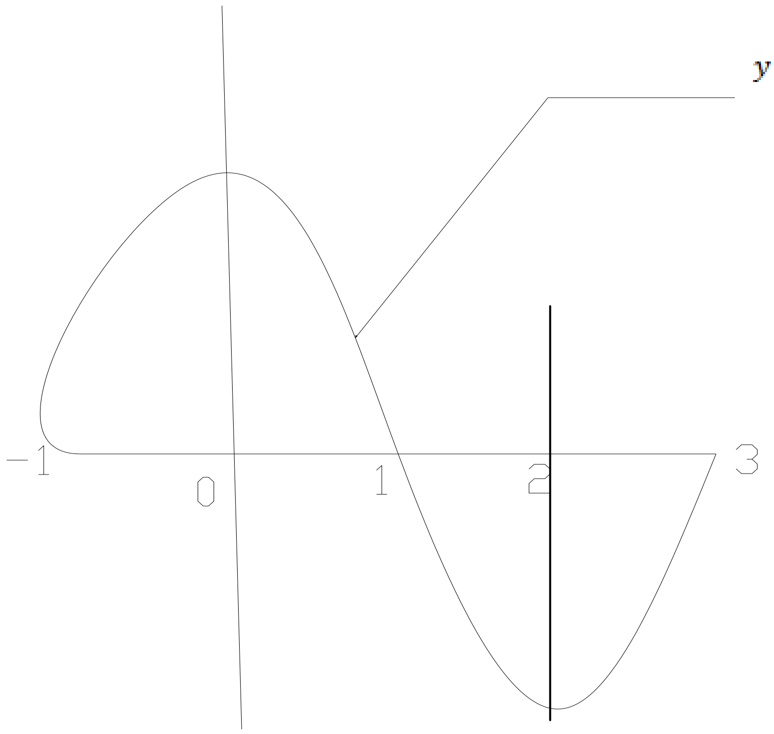
$=\frac{10}{3}+\frac{7}{6}=4.5$ وحدة مربعة

مثال /3 :–اوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $(y = x^3 - 3x^2 - x + 3)$

وقطعة المحور (x) من $(x = -1)$ الى $(x = 2)$ والمستقيم $(x = 2)$

الحل/:– $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x-3)(x+1)$

$\therefore$ نقاط تقاطع المنحنى مع محور (x) هي $(-1 \quad , \quad 1 \ , \ 3)$



والمنطقة المحصورة من $x = -1$ إلى $x = 1$ تقع فوق محور x

والمنطقة المحصورة من $x = 1$ إلى $x = 2$ تقع تحت محور x

وعليه فان التكامل سيكون لمنطقتين $Area_{-1}^{2} = Area_1 - Area_2$

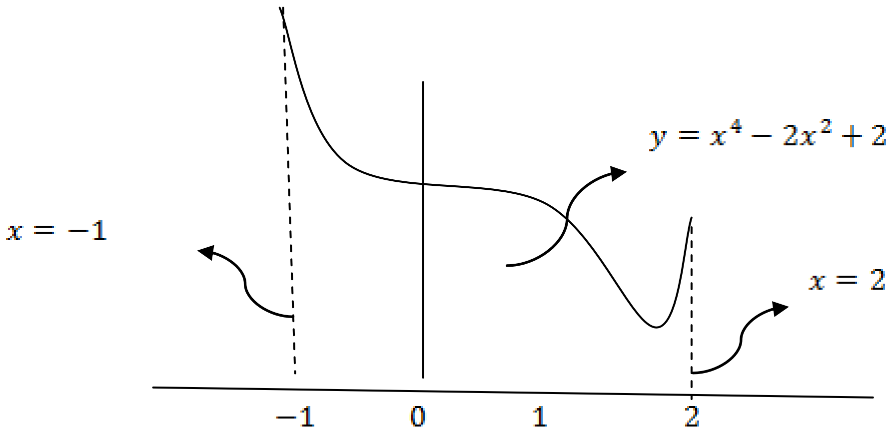
$$A = \int_{-1}^{1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx - \int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2}$$
$$= \left[\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 - \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3\right)\right] - \left[\frac{16}{4} - 8 - \frac{4}{2} + 6 - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right)\right]$$
$$= \frac{7}{4} + \frac{9}{4} - \left(0 - \frac{7}{4}\right) = 4 + \frac{7}{4} = 5.75$$

مثال 4/ :-اوجد المساحة المحددة بالمنحنى $(y = x^4 - 2x^2 + 2)$

والمحور (x) والمستقيمين $x = 2$ و $x = -1$

الدالة/ $y = x^4 - 2x^2 + 2$ مستمرة وموجبة القيمة في الفترة $(-1 \quad , \quad 2)$ كما في الشكل

.



$$A = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^2 + 2)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$A = \left(\frac{32}{5} - \frac{32}{4} + 4\right) - \left(\frac{-1}{5} - \frac{2}{4} - 2\right)$$

$\therefore$ المساحة $A = \frac{48}{20} + \frac{54}{20} - \left(\frac{102}{20} - \frac{51}{10}\right) = 5.1$ وحدة مربعة

الحل / نحدد نقاط تقاطع المنحنيين بحل معادلتيهما آنيا حيث $y = 0$)

$\therefore 2 - x^2 = -x$

$x^2 - x - 2 = 0 = (x+1)(x-2) = 0$

اما $\therefore x = -1 \quad , \quad x = 2$

او $\therefore y = 1 \quad , y = -2$

$\therefore$ نقطتي التقاطع هما $(-1 \quad , \quad 1)$ و $(2 \quad , -2)$

ثم نرسم المنحنيين بتعويض قيمة $(2 > x > -1)$ لتحديد المنحنى الاعلى كما في الشكل

ويكون المنحنى $(y = 2 - x^2)$ اعلى من الخط المستقيم $(y = -x)$

مثال 5/ :-اوجد المساحة المحددة بالمنحنى $(y = x^4 - 6x^2 + 5)$ ومحور (x) للفترة $(2\ ,\ 3)$

$$solution\ ; \qquad y = f(x) = x^4 - 6x^2 + 5 = 0.0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 1) = 0.0$$

$x = \pm\sqrt{5}$ او $x = \pm 1$ اما

بما ان $-\sqrt{5}\ ,\ \pm 1$ لاتنتمي الى الفترة $(2\ ,\ 3)$فانها تهمل

$$\int_2^{\sqrt{5}} (x^4 - 6x^2 + 5)dx + \int_{\sqrt{5}}^3 (x^4 - 6x^2 + 5)\,dx$$

$$= \left|\left[\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 5x\right]_2^{\sqrt{5}}\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 5x\right]_{\sqrt{5}}^{3}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{25\sqrt{5}}{5} - 10\sqrt{5} + 5\sqrt{5}\right) - \left(\frac{32}{5} - 16 + 10\right)\right| + \left|\left(\frac{243}{5} - 54 + 15\right) - \left(\frac{25\sqrt{5}}{5} - 10\sqrt{5} + 5\sqrt{5}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{-2}{5}\right| + \left|\frac{48}{5}\right| = \frac{2}{5} + \frac{48}{5} = 10\ \ units$$

التقريب في التكامل المحدد

إضافة إلى الطرق التي درستاها سابقا في التكامل المحدد هناك طريقتان لتقريب قيمة التكامل المحدود هما

١) الطريقة الأولى تسمى قاعدة شبه المنحرف .

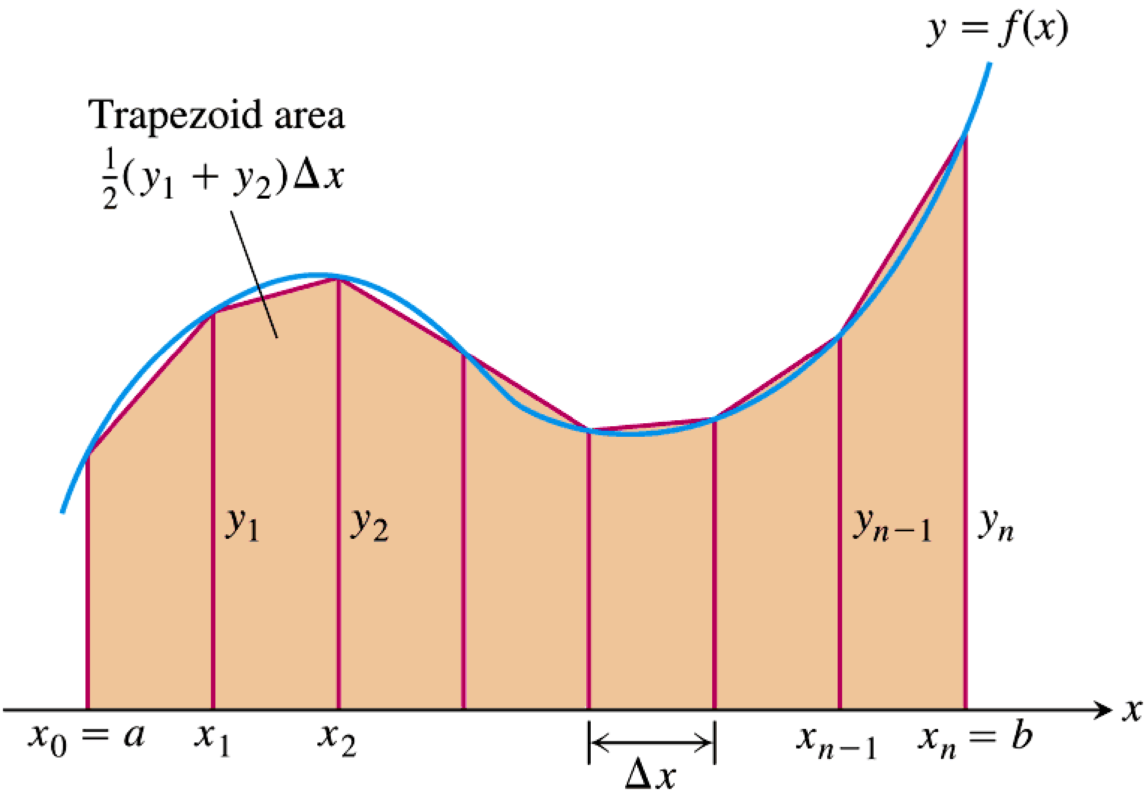


FIGURE 8.7 The Trapezoidal Rule approximates short stretches of the curve $y = f(x)$ with line segments. To approximate the integral of f from a to b, we add the areas of the trapezoids made by joining the ends of the segments to the x-axis.

ثم نستخرج قيمة $\Delta x = \frac{B - A}{n}$

حيث تمثل المسافة بين جزء وآخر

نوجد مساحة كل جزء وذلك بإيجاد حاصل ضرب نصف مجموع طول الضلعين المتوازيين مضروب في المسافة بينهما وكما يلي

$$A_1 = \frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]\Delta x$$

والمجموع لهذه المساحات هو تقريب للمساحة المحدودة بالمحور x والمخطط $y = f(x)$ والمستقيمين الرأسيين

وعليه تكتب بالصيغة التالية $x = b$, $x = A$

$$\int_A^B f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) \ldots\ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

حيث $\Delta x = \frac{B - A}{n}$ و $x_i = A + i\Delta x$

وعليه فان مجموع مساحات أشباه المنحرفات يكون قريبا من التفاضل المطلوب ولو اعتبرنا الرمز يدل على التساوي التقريبي

$$\therefore \int_A^B f(x) \cong \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots\ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

The Trapezoidal Rule

To approximate $\int_a^b f(x)\,dx$, use

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$

The y's are the values of f at the partition points

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b,$$

where $\Delta x = (b - a)/n$.

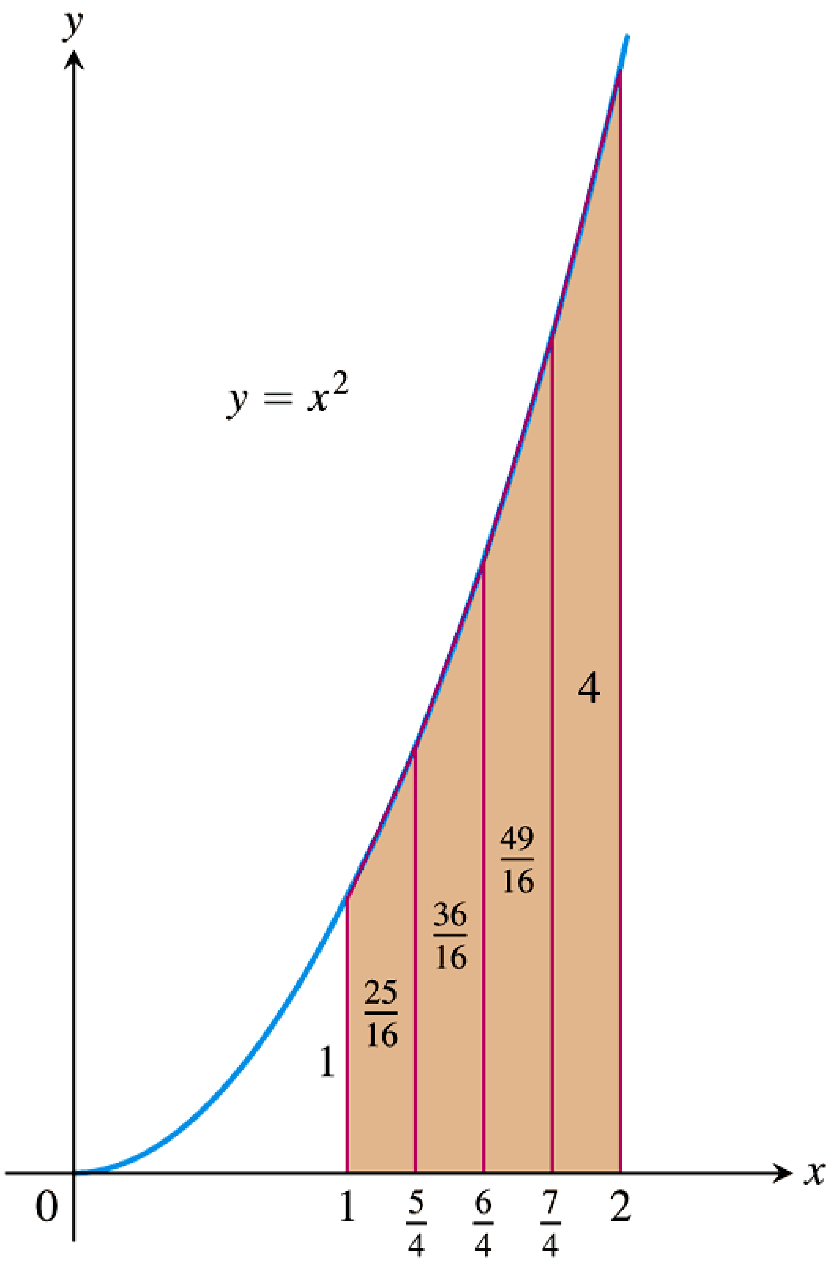

y
$y = x^2$
4
$\frac{49}{16}$
$\frac{36}{16}$
$\frac{25}{16}$
1
x
0
1
$\frac{5}{4}$
$\frac{6}{4}$
$\frac{7}{4}$
2

TABLE 8.2

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

الطريقة الثانية تسمى قاعدة سمبسون Simpson Rule .

في هذه الطريقة نقسم الفترة إلى عدد من الفترات $\langle n \rangle$ المتساوية ولكن يشترط ان يكون عدد الاقسام زوجي .

لتكن نقطة (x_1) تمثل منتصف الفترة $(x_0 \ , \ x_2)$ التي طولها $2h$ وعندئذ تكون

$$x_0 = x_1 - h \qquad , x_2 = x_1 + h$$

تأمل أن لديك ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة هي

$$p_0(x_1 - h , y_0) \quad , \quad p_1(x_1 , y_1) \quad , \quad p_2(x_1 + h , y_2)$$

كما في الشكل أعلاه أي أنها تمثل قطع مكافئ ذو محور أساسي راسي له معادلة بالصيغة $y = Ax^2 + Bx + C$ ويمر هذا القطع بالنقاط $p_0 \ , \ p_1 \ , \ p_2$ وبتطبيق معادلة القطع المكافئ على النقاط الثلاثة نحصل على

$$y_0 = A(x_1 - h)^2 + B(x_1 - h) + C$$
$$y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C$$
$$y_2 = A(x_1 + h)^2 + B(x_1 + h) + C$$

ثم نوجد قيمة $y_0 + 4y_1 + y_2$ والتي تساوي

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6Ax_1^2 + 2Ah^2 + 6Bx_1 + 6C$$

ثم نحسب مساحة المنطقة المحددة بالقطع المكافئ والمحور x والمستقيمين $(x_1 - h) \ , (x_1 + h)$

فيكون لدينا تكامل محدد هو

$$\int_{x_1-h}^{x_1+h} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[\frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx\right]_{x_1-h}^{x_1+h}$$

$$= \frac{A}{3}[(x_1 + h)^3 - (x_1 - h)^3] + \frac{B}{2}[(x_1 + h)^2 - (x_1 - h)^2] + C[(x_1 + h) - (x_1 - h)]$$

$$= \frac{h}{3}[A(6x_1^2 + 2h^2) + B(6x_1) + 6C]$$

وبما ان المقدار $[A(6x_1^2 + 2h^2) + B(6x_1) + 6C] = [y_0 + 4y_1 + y_2]$

إذن $\int_{x_1-h}^{x_1+h} = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$

و بأخذ عدة نقاط للشكل يكون التكامل بالصيغة التالية

$$\int_A^B f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

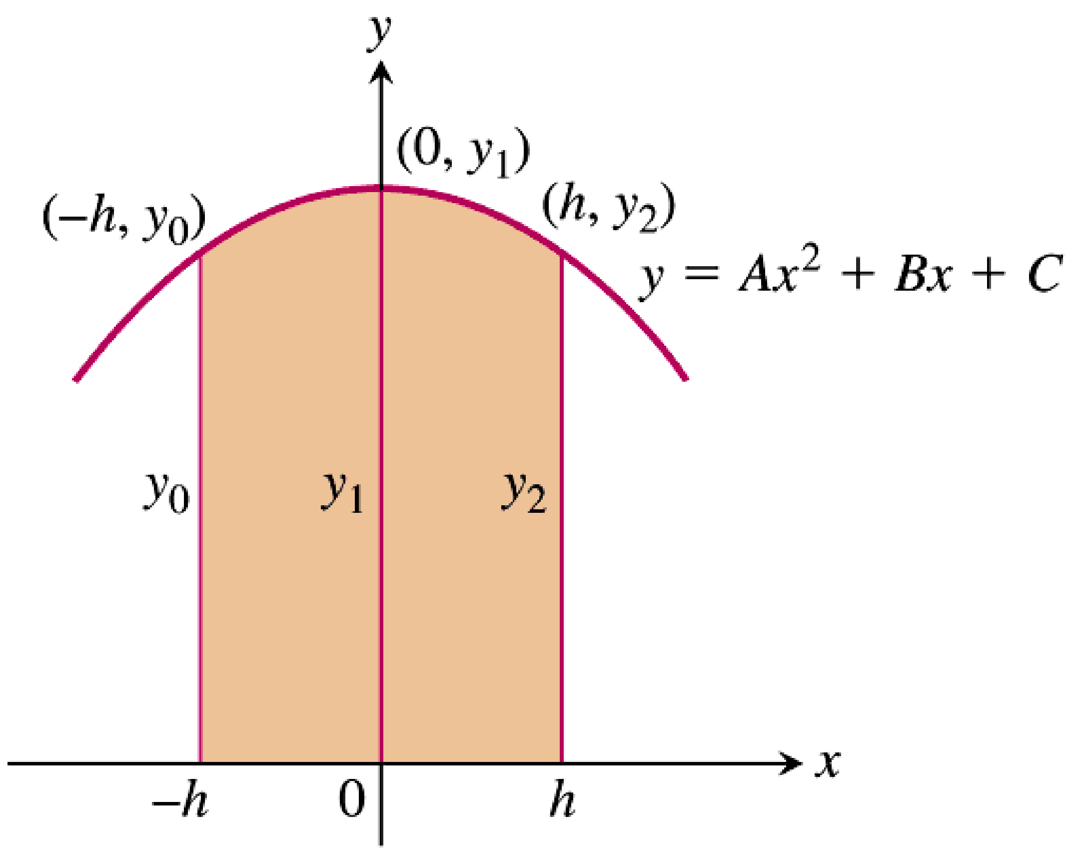


FIGURE 8.10 By integrating from $-h$ to h, we find the shaded area to be

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

تنص قاعدة سمبسون على انه إذا مر القطع المكافئ ذو محور راسي $y = Ax^2 + Bx + C$ بالنقاط الثلاثة

$p_0(x_1 - h\ , y_0)$, $p_1(x_1\ , y_1)$, $p_2(x_1 + h\ , y_2)$

التي لا تقع على استقامة واحدة فان المساحة المحددة بالقطع المكافئ والمحور x والمستقيمين الراسيين

$x = x_1 - h$, $x = x_1 + h$

معطاة بـــ المساحة = $\int_{x_1-h}^{x_1+h} = \frac{h}{3}\ [y_0 + 4y_1 + y_2]$

و بأخذ عدة نقاط للشكل يكون التكامل بالصيغة التالية

$$\int_A^B f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

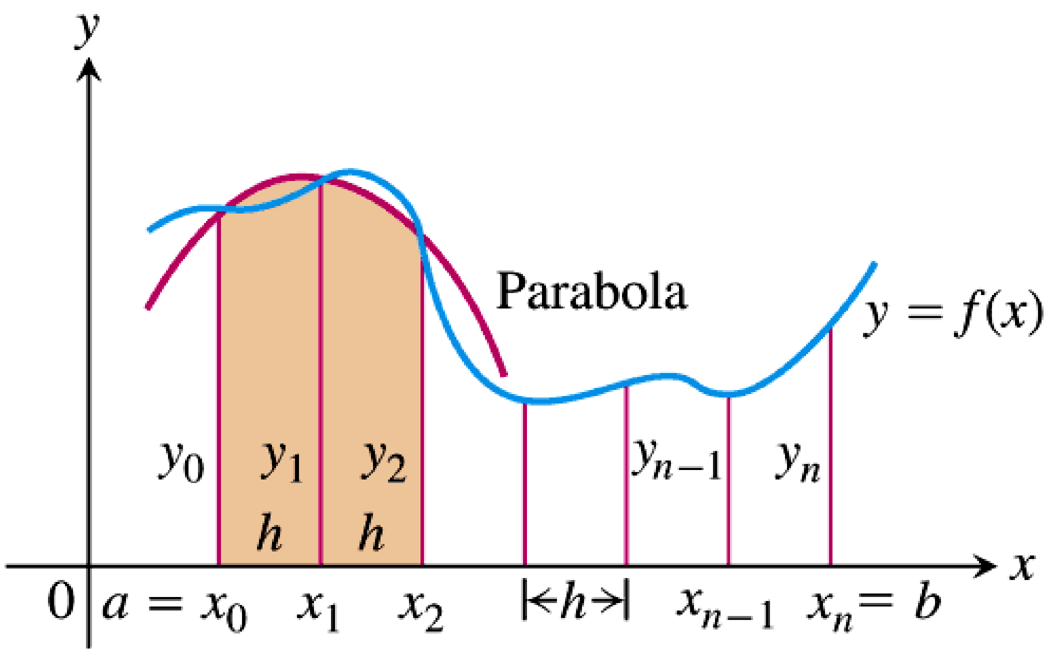


FIGURE 8.9 Simpson's Rule approximates short stretches of the curve with parabolas.

Simpson's Rule

To approximate $\int_a^b f(x)\,dx$, use

$$S = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right).$$

The y's are the values of f at the partition points

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b.$$

The number n is even, and $\Delta x = (b - a)/n$.

EXAMPLE 2 Use Simpson's Rule with $n = 4$ to approximate $\int_0^2 5x^4 \, dx$.

Solution Partition [0, 2] into four subintervals and evaluate $y = 5x^4$ at the partition points (Table 8.3). Then apply Simpson's Rule with $n = 4$ and $\Delta x = 1/2$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\frac{5}{16}\right) + 2(5) + 4\left(\frac{405}{16}\right) + 80\right) \\ &= 32\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

This estimate differs from the exact value (32) by only $1/12$, a percentage error of less than three-tenths of one percent, and this was with just four subintervals.

TABLE 8.3

x	$y = 5x^4$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$
1	5
$\frac{3}{2}$	$\frac{405}{16}$
2	80

==

مثال/١ :-

بطريقة شبه المنحرف جد ناتج $\int_1^7 (x^2 - 1)dx$

الحل :-

نختار عدد من الأجزاء وليكن 6 جزء

نوجد قيمة $\Delta x = \frac{B - A}{n} = \frac{7-1}{6} = 1$

لتكن $y = (x^2 - 1)$

i	x_i	$y_i = (x^2 - 1)$	C_i	$C_i y_i$
X_0	١	$y_0 = (1^2 - 1) = 0$	١	٠
X_1	٢	$y_1 = (2^2 - 1) = 3$	٢	٦
X_2	٣	$y_2 = (3^2 - 1) = 8$	٢	١٦
X_3	٤	$y_3 = (4^2 - 1) = 15$	٢	٣٠
X_4	٥	$y_4 = (5^2 - 1) = 24$	٢	٤٨
X_5	٦	$y_5 = (6^2 - 1) = 35$	٢	٧٠
X_6	٧	$y_6 = (7^2 - 1) = 48$	١	٤٨
المجموع (total)				٢١٨

بتطبيق قاعدة شبه المنحرف نحصل على

$$\int_1^7 (x^2 - 1)\,dx = \frac{\Delta x}{2}[0 + 6 + 16 + 30 + 48 + 70 + 48] = \frac{218}{2} = 109$$

==

مثال /٢ :- احسب قيمة $\int_0^\pi \sin x\,dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف و بأخذ $n = 6$

الحل :-

إذا أخذنا $n = 6$ فان $\Delta x = \frac{B - A}{n} = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$

وعليه فان $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$

$x_4 = \frac{2\pi}{3}$, $x_5 = \frac{5\pi}{6}$, $x_6 = \pi$,

ولتكن $y = \sin x$

$f(x_0) = \sin 0 = 0.0$, $f(x_1) = \sin\frac{\pi}{6} = 0.5$,

$f(x_2) = \sin\frac{\pi}{3} = 0.866$, $f(x_3) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$,

$f(x_4) = \sin\frac{2\pi}{3} = 0.866$, $f(x_5) = \sin\frac{5\pi}{6} = 0.5$,

$f(x_6) = \sin\pi = 0.0$

i	x_i	$y = \sin x$	C_i	$C_i y_i$
X_0	0	$y_0 = \sin 0 = 0.0$	١	٠
X_1	$\frac{\pi}{6}$	$y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = 0.5$	2	١
X_2	$\frac{\pi}{3}$	$y_2 = \sin\frac{\pi}{3} = 0.866$	٢	١.٧٣٢
X_3	$\frac{\pi}{2}$	$y_3 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$	2	٢
X_4	$\frac{2}{3}\pi$	$y_4 = \sin\frac{2\pi}{3} = 0.866$	٢	١.٧٣٢
X_5	$\frac{5}{6}\pi$	$y_5 = \sin\frac{5\pi}{6} = 0.5$	2	١
X_6	π	$y_6 = \sin\pi = 0.0$	١	٠
المجموع(total)				7.464

باستخدام قاعدة شبه المنحرف نحصل على

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{\pi}{12}[0.0 + 2(0.5) + 2(0.866) + 2(1) + 2(0.866) + 2(0.5) + 0.0]$$

$$= 1.954$$

أو باستخدام الجدول $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{\pi}{12} * 7.464 = 1.954$

مثال /٣ :- احسب قيمة $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف و بأخذ $n = 6$

الحل :-

إذا أخذنا $n = 6$ فان $\Delta x = \frac{B - A}{n} = \frac{\pi/2 - 0}{6} = \frac{\pi}{12}$

وعليه فان $x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = \frac{\pi}{12} \quad , \quad x_2 = \frac{\pi}{6} \quad , \quad x_3 = \frac{\pi}{4}$

$x_4 = \frac{\pi}{3} \quad , \quad x_5 = \frac{5\pi}{12} \quad , \quad x_6 = \pi/2 \quad ,$

ولتكن $y = \sqrt{\sin x}$

$f(x_0) = \sqrt{\sin 0} = 0.0 \quad , \quad f(x_1) = \sqrt{\sin \frac{\pi}{12}} = 0.50875 \; ,$

$f(x_2) = \sqrt{\sin \frac{\pi}{6}} = 0.70710 \; , \; f(x_3) = \sqrt{\sin \frac{\pi}{4}} = 0.84090 \; ,$

$f(x_4) = \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} = 0.93060 \; , \quad f(x_5) = \sqrt{\sin \frac{5\pi}{12}} = 0.98280 \quad ,$

$f(x_6) = \sqrt{\sin \pi/2} = 1$

i	x_i	$y_i = \sqrt{\sin x}$	C_i	$C_i y_i$
X_0	0	$y_0 = \sqrt{\sin 0} = 0.0$	١	.
X_1	$\frac{\pi}{12}$	$y_1 = \sqrt{\sin \frac{\pi}{12}} = 0.50875$	٢	١.٠١٧٥
X_2	$\frac{\pi}{6}$	$y_2 = \sqrt{\sin \frac{\pi}{6}} = 0.70710$	٢	1.41420
X_3	$\frac{\pi}{4}$	$y_3 = \sqrt{\sin \frac{\pi}{4}} = 0.84090$	٢	١.٦٨١٨
X_4	$\frac{\pi}{3}$	$y_4 = \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} = 0.93060$	٢	١.٩٦١٢٠
X_5	$\frac{5\pi}{12}$	$y_5 = \sqrt{\sin \frac{5\pi}{12}} = 0.98280$	٢	١.٩٦٥٦
X_6	$\pi/2$	$y_6 = \sqrt{\sin \frac{\pi}{2}} = 1$	١	١
المجموع (total)				٩.٠٤٠٣

باستخدام قاعدة شبه المنحرف نحصل على

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6)$$

$$= \frac{\pi}{24}(9.0403) = 1.8727$$

أو باستخدام الجدول $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx = \frac{\Delta x}{2}(9.0403) = \frac{\pi}{24}(9.0403) = 1.1872$

مثال /١ :-

بطريقة سمبسون جد ناتج $\int_1^7 (x^2 - 1)dx$

الحل :-

نختار عدد من الأجزاء وليكن 6 جزء

نوجد قيمة $\Delta x = \frac{B - A}{n} = \frac{7-1}{6} = 1$

نعمل جدول لقيمة كل من x , y

لتكن $y = (x^2 - 1)$

i	x_i	$y_i = (x^2 - 1)$	C_i	$C_i y_i$
X_0	١	$y_0 = (1^2 - 1) = 0$	١	٠
X_1	٢	$y_1 = (2^2 - 1) = 3$	٤	١٢
X_2	٣	$y_2 = (3^2 - 1) = 8$	٢	١٦
X_3	٤	$y_3 = (4^2 - 1) = 15$	٤	٦٠
X_4	٥	$y_4 = (5^2 - 1) = 24$	٢	٤٨
X_5	٦	$y_5 = (6^2 - 1) = 35$	٤	١٤٠
X_6	٧	$y_6 = (7^2 - 1) = 48$	١	٤٨
المجموع (total)				324

نطبق قاعدة سمبسون فنحصل على

$$\int_1^7 (x^2 - 1)dx = \frac{\Delta x}{3} \left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6\right]$$

$$\int_1^7 (x^2 - 1)\, dx = \frac{1}{3}(324) = \frac{324}{3} = 108$$

مثال ٢/ :- احسب قيمة $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ باستخدام قاعدة سمبسون و بأخذ $n = 6$

الحل :-

إذا أخذنا $n = 6$ فان $\Delta x = \frac{B - A}{n} = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$

وعليه فان $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$

$x_4 = \frac{2\pi}{3}$, $x_5 = \frac{5\pi}{6}$, $x_6 = \pi$,

ولتكن $y = \sin x$

$f(x_0) = \sin 0 = 0.0$, $f(x_1) = \sin\frac{\pi}{6} = 0.5$,

$f(x_2) = \sin\frac{\pi}{3} = 0.866$, $f(x_3) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$,

$f(x_4) = \sin\frac{2\pi}{3} = 0.866$, $f(x_5) = \sin\frac{5\pi}{6} = 0.5$,

$f(x_6) = \sin \pi = 0.0$

i	x_i	$y = \sin x$	C_i	$C_i y_i$

X_0	0	$y_0 = \sin 0 = 0.0$	١	٠
X_1	$\frac{\pi}{6}$	$y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = 0.5$	٤	٢
X_2	$\frac{\pi}{3}$	$y_2 = \sin\frac{\pi}{3} = 0.866$	٢	١.٧٣٢
X_3	$\frac{\pi}{2}$	$y_3 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$	٤	٤
X_4	$\frac{2}{3}\pi$	$y_4 = \sin\frac{2\pi}{3} = 0.866$	٢	١.٧٣٢
X_5	$\frac{5}{6}\pi$	$y_5 = \sin\frac{5\pi}{6} = 0.5$	٤	٢
X_6	π	$y_6 = \sin\pi = 0.0$	١	٠
المجموع (total)				١١.٤٦٤

باستخدام قاعدة سمبسون نحصل على

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{\pi}{18}[0.0 + 4(0.5) + 2(0.866) + 4(1) + 2(0.866) + 4(0.5) + 0.0]$$

$$= 2.00087$$

أو باستخدام الجدول $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{\pi}{18} * 11.464 = 2.00087$

مثال ٣/ :- احسب قيمة $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx$ باستخدام قاعدة سمبسون و بأخذ $n = 6$

الحل :-

إذا أخذنا $n = 6$ فان $\Delta x = \frac{B - A}{n} = \frac{\pi/2 - 0}{6} = \frac{\pi}{12}$

وعليه فان $x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = \frac{\pi}{12} \quad , \quad x_2 = \frac{\pi}{6} \quad , \quad x_3 = \frac{\pi}{4}$

$$x_4 = \frac{\pi}{3} \quad , \quad x_5 = \frac{5\pi}{12} \quad , \quad x_6 = \pi/2 \quad ,$$

ولتكن $y = \sqrt{\sin x}$

$$f(x_0) = \sqrt{\sin 0} = 0.0 \quad , \quad f(x_1) = \sqrt{\sin\frac{\pi}{12}} = 0.50875 \quad ,$$

$$f(x_2) = \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}} = 0.70710 \quad , \quad f(x_3) = \sqrt{\sin\frac{\pi}{4}} = 0.84090 \quad ,$$

$$f(x_4) = \sqrt{\sin\frac{\pi}{3}} = 0.93060 \quad , \qquad f(x_5) = \sqrt{\sin\frac{5\pi}{12}} = 0.98280 \quad ,$$

$$f(x_6) = \sqrt{\sin \pi/2} = 1$$

i	x_i	$y_i = \sqrt{\sin x}$	C_i	$C_i y_i$
X_0	0	$y_0 = \sqrt{\sin 0} = 0.0$	١	٠
X_1	$\frac{\pi}{12}$	$y_1 = \sqrt{\sin\frac{\pi}{12}} = 0.50875$	٤	2.03500
X_2	$\frac{\pi}{6}$	$y_2 = \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}} = 0.70710$	٢	1.41420
X_3	$\frac{\pi}{4}$	$y_3 = \sqrt{\sin\frac{\pi}{4}} = 0.84090$	٤	٣.٣٦٣٦٠
X_4	$\frac{\pi}{3}$	$y_4 = \sqrt{\sin\frac{\pi}{3}} = 0.93060$	٢	١.٩٦١٢٠
X_5	$\frac{5\pi}{12}$	$y_5 = \sqrt{\sin\frac{5\pi}{12}} = 0.98280$	٤	٣.٩٣١٢٠
X_6	$\pi/2$	$y_6 = \sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} = 1$	١	١
المجموع (total)				١٣.٦٠٥٢٠

باستخدام قاعدة سمبسون نحصل على

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$= \frac{\pi}{36}(13.60520) = 1.18667$$

أو باستخدام الجدول $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx = \frac{\Delta x}{3}(13.60520) = \frac{\pi}{36}(13.60520) = 1.18667$

مثال / ٣ :- استعمل قاعدة سمبسون مع $n = 8$ لتقريب القيمة لـ $\int_1^2 \frac{dx}{1+x}$

الحل :-

نوجد قيمة $\Delta x = \frac{B-A}{n} = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$

لتكن $y = \frac{1}{1+x}$

نعمل جدول لقيمة كل من x , y

i	x_i	$y_i = \dfrac{1}{1+x_i}$	C_i	$C_i y_i$
X_0	١	$y_0 = \dfrac{1}{1+1} = 0.5$	١	٠.٥
X_1	1.125	$y_1 = \dfrac{1}{1+1.125} = 0.470$	٤	١.٨٨٢
X_2	1.25	$y_2 = \dfrac{1}{1+1.25} = 0.4444$	٢	٠.٨٨٨٨
X_3	1.375	$y_3 = \dfrac{1}{1+1.375} = 0.4210$	٤	١.٦٨٤
X_4	1.5	$y_4 = \dfrac{1}{1+1.5} = 0.400$	٢	٠.٨
X_5	1.625	$y_5 = \dfrac{1}{1+1.625} = 0.380$	٤	١.٥٢
X_6	1.75	$y_6 = \dfrac{1}{1+1.75} = 0.3636$	٢	٠.٧٢٧٢
X_7	1.875	$y_7 = \dfrac{1}{1+1.875} = 0.3478$	٤	١.٣٩١٢
X_8	2	$y_8 = \dfrac{1}{1+2} = 0.3333$	١	٠.٣٣٣٣
المجموع (total)				٩.٧٢٤٥

نطبق قاعدة سمبسون فنحصل على

$$\int_1^7 \frac{1}{1+x}dx = \frac{\Delta x}{3} \quad [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8]$$

$$\int_1^7 \left(\frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{0.125}{3}(9.7245) = \frac{1.2155625}{3} = 0.4051$$

واجب :- استعمل قاعدة سمبسون لتقريب القيمة للتكاملات التالية

عدد الفترات	التكامل	الجواب
$n = 4$	$\int_0^1 x^4\,dx$	0.20052
$n = 4$	$\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$	0.78539
$n = 4$	$\int_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+\sin x}$	1.00068
$n = 6$	$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$	١.٠٠٠٠٣
$n = 6$	$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$	1.111

$n = 8$	$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}}$	1.4028

الإحصاء

هو العلم الذي يبحث ويعالج المجموعات التي تتكون من مفردات كثيرة ويمنحنا الوسائل التي تساعد على جمع وتنظيم البيانات العينية لهذه المجموعات وتحليلها ومقارنتها بغيرها من المجموعات .

ولغرض تطبيق عملية الإحصاء علينا أن نتبع الخطوات التالية .

١) جمع المعلومات : - وتتضمن جمع البيانات والمعلومات الأولية التي نحصل عليها من المصادر الحكومية او باستفتاء او باختبار عينة من المعلومات بصورة عشوائية .

٢) تنظيم البيانات :- وفيها يتم تنظيم البيانات بجداول إحصائية أو رسوم بيانية

٣) معالجة البيانات :- والمقصود بالمعالجة هي تطبيق القوانين الإحصائية المناسبة لاستخراج نتائج عددية لها دلالة إحصائية كاستخراج المتوسطات أو الانحرافات وغيرها من الأمور الإحصائية .

٤) التفسير والاستنتاج :-. وهذه المرحلة من أهم المراحل وتتطلب البداهة والأمانة وعدم التحيز والإلمام التام بالموضوع الذي يجري الإحصاء فيه مثل الذكاء أو الاستيراد أو التصدير وغيرها .

التوزيع التكراري Frequency Distribution

يتكون الجدول الخاص بعملية التوزيع التكراري من مجموعة من الأعمدة هي .

١) العمود الأول يحتوي على الفئات وهي فترات متساوية في القيم أو غير متساوية وتضم البيانات جميعا ويكون عدد الفئات لا يقل عن ٦ ولا يزيد عن ١٥ فئة .

٢) العمود الثاني يتكون من التكرارات والتي هي عبارة عن عدد البيانات الواقعة في كل فئة .

٣) العمود الثالث يحتوي على مراكز الفئات والتي يساوي حاصل جمع حدي الفئة مقسوما على ٢ .

٤) العمود الرابع يحتوي على التكرار المتجمع الصاعد .

٥) العمود الخامس يحتوي على التكرار المتجمع النازل .

مثال / ارسم جداول التوزيع التكراري لأوزان مجموعة من الصخور عددها (٥٠) إذا كانت أوزانها مقدرة بالغرامات كالتالي .

٦٩٠	٤٦٠	٩٢٠	٧٦٠	٦٨٠	٧٥٠	٨٣٠	٧٠٠
٧٨٠	٤٥٠	٤٩٠	٥٧٠	٦٣٠	٥٩٠	٥١٠	٦١٠
٧٢٠	٨٩٠	٦٥٠	٩١٠	٨٠٠	٥٣٠	٤٣٠	٩٤٠

٨٥٠	٧٥٠	٩٥٠	٣٥٠	٤٤٠	٥٤٠	٦٤٠	٧٤٠
٧٢٠	٣٩٠	٥٦٠	٦٥٠	٥٧٠	٥٥٠	٧٥٠	٧٦٠
٧١٠	٦١٠	٥٣٠	٤٠٠	٣٨٠	٣٦٠	٤٩٠	٤٨٠
						٩٠٠	٨١٠

الحل /

١) نستخرج المدى (m) والذي يساوي الفرق بين اكبر عدد واصغر عدد في البيانات مضافا اليه (١) .

M = (950 – 350) + 1 = 601

أي انه يوجد ٦٠١ عدد يقع بين ٣٥٠ و ٩٥٠ على ان يكون العددان ٣٥٠ و ٩٥٠ من ضمنها .

٢) نختار طول الفئة (L) بحيث نحصل على عدد من الفئات لا يقل عن ٦ ولا يزيد عن ١٥ ، في هذا المثال نختار طول الفئة يساوي (١٠٠). ثم نوجد عدد الفئات(N) وذلك بقسمة المدى على طول الفئة ونقرب الكسور إلى الواحد مهما كان الكسر .

(N= M/L = 601 /100 = 6. 01 = 7 = إذن عدد الفئاتN)

٣) نختار بداية الفئة الأولى وتكون عادة اصغر عدد في البيانات ثم نوزع بقية الفئات .

٤) نسجل عدد البيانات الموجودة في كل فئة

٥) نحسب التكرار المتجمع الصاعد التي يساوي مجموع تكرار الفئة مع التكرارات التي قبلها .

٦) نحسب التكرار المتجمع النازل للفئة الأولى ويساوي مجموع التكرارات ثم بقية الفئات والتي يساوي مجموع التكرار مطروحا منه تكرار الفئة التي قبلها كما في الجدول التالي

الفئات	مراكز الفئات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٣٥٠ - ٤٤٩	٣٩٩.٥	٨	٨	٥٠
٤٥٠ - ٥٤٩	٤٩٩.٥	٩	١٧	٤٢
٥٥٠ - ٦٤٩	٥٩٩.٥	٩	٢٦	٣٣
٦٥٠ - ٧٤٩	٦٩٩.٥	١٠	٣٦	٢٤
٧٥٠ - ٨٤٩	٧٩٩.٥	٧	٤٣	١٤
٨٥٠ - ٩٤٩	٨٩٩.٥	٦	٤٩	٧
٩٥٠ - ١٠٤٩	٩٩٩.٥	١	٥٠	١
مجموع التكرارات		٥٠		

من الجدول نستطيع أن نحدد عدد الأوزان التي هي أكثر أو تساوي(٥٥٠)والتي تساوي(٣٣) أما عدد الأوزان التي تقل أو تساوي (٦٤٩) والتي تساوي (٢٦) .

مثال /٢

ارسم جدول التوزيع التكراري لمجموعة عمال يشتغلون في حفر بئر للنفط عددهم (١٠٠) عامل تتراوح أعمارهم بين (١٨ - ٥٠) سنة سجلت كالأتي

٣٠	١٨	٢٥	٢٧	٢٩	٣١	٣٤	٣٦	٣٨	٤٠
١٩	١٩	٢٠	٢٢	٢٥	٣٥	٣٧	٤٩	٤٧	٤٥
٢٠	٢٣	٢٤	٢٦	٢٨	٣٢	٣٥	٣٨	٣٦	٤٢
٢٤	٢٦	٣١	٣٣	٣٥	٣٩	٣٧	٣٤	٣٥	٤٣
٤٦	٤٧	٤٩	٥٠	٣٠	٢٨	٣٨	٤٤	٤٥	٤٧
٢٩	٢٧	٢١	٢٥	٣٤	٢٦	٣٥	٣٩	٤٦	٤٩
٥٠	٤١	٤٤	٤١	٣٨	٣٦	٣٩	٢٩	٣١	٢٦
٤١	٢٤	٢١	١٨	٣١	٣٤	٤١	٣٨	٣٥	٢٨
٤٢	٣٠	٤٠	٢٠	٥٠	٢٥	٣٥	٤٥	٢٣	٣٣
٢٢	٣٢	٤٢	٣٩	٤٩	٢٩	١٩	١٨	٢٨	٣٨

الحل /

المدى = $m = (50-18)+1 = 32+1 = 33$

كما في الجدول $n = \frac{m}{l} = \frac{33}{5} = 6.6 \cong 7$ نختار طول الفئة وليكن (٥) فإننا نحصل على ٧ فئات

ألفئات	مراكز ألفئات	ألتكرار	ألتكرار المتجمع ألصاعد	ألتكرار المتجمع ألنازل
١٨ _ ٢٢	٢٠	١٣	١٣	١٠٠
٢٣ _ ٢٧	٢٥	١٥	٢٨	٨٧
٢٨ _ ٣٢	٣٠	١٧	٤٥	٧٢
٣٣ _ ٣٧	٣٥	١٨	٦٣	٥٥
٣٢ _ ٤٢	٤٠	١٩	٨٢	٣٧
٤٣ _ ٤٧	٤٥	١١	٩٣	١٨
٤٨ _ ٥٢	٥٠	٧	١٠٠	١
		١٠٠		

من الجدول نستطيع أن نحدد عدد الأعمار التي هي أكثر أو تساوي(٣٣)والتي تساوي(٥٥) أما عدد الأوزان التي تقل أو تساوي (٣٧) والتي تساوي (٦٣) .

الوسط الحسابي

الوسط الحسابي (x^{-}) يعرف بأنه حاصل قسمة المجموع الجبري لمجموعة من الأعداد على عددها كما في المعادلة التالية

$$x^{-}=\frac{1}{n}[x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots\dots\dots\dots\dots\dots x_n]=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}x$$

وهناك معادلة ثانية لحساب الوسط لحسابي هي

$$x^{-}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+\cdots\dots\dots\dots\dots\dots x_nf_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots\dots\dots\dots\dots\dots\dots f_n}=\frac{\sum_1^n xf}{\sum_1^n f}$$

حيث $x =$ مركز الفئة , $f =$ التكرار للفئة

مثال / الجدول التكراري التالي يمثل اوزان العمال في معمل معين (40 عامل) المطلوب حساب معدل وزن العامل الواحد

الفئاتkg (الأوزان)	مراكز الفئاتx	التكرار f(عدد العمال)	xf
٤٥ - ٤٩	٤٧	٤	١٨٨
٥٠ - ٥٤	٥٢	١٠	٥٢٠
٥٥ - ٥٩	٥٧	١١	٦٢٧
٦٠ - ٦٤	٦٢	٦	٣٧٢
٦٥ - ٦٩	٦٧	٦	٤٠٢
٧٠ - ٧٤	٧٢	٢	١٤٤
٧٥ - ٧٩	٧٧	١	٠٧٧
المجموع		٤٠	٢٣٣٠

$$x^{-}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+\cdots\dots\dots\dots x_nf_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots\dots\dots\dots f_n}=\frac{\sum_1^n xf}{\sum_1^n f}=\frac{2330}{40}=58.25\quad kg$$

الطريقة الثالثة لحساب الوسط الحسابي باستخدام الوسط الحسابي الفرضي وكما يلي :-

الوسط الحسابي الفرضي $= A$, $d=x-A$ = حيث الانحراف $x^{-}=A+\frac{\sum_1^n d}{n}$

مثال / الجدول التكراري التالي يمثل مجموعة من الاعداد المطلوب حساب الوسط الحسابي لهذه الاعداد

$$X^{-} = A + \frac{\sum d}{n} = 250 + \frac{21}{5} = 254.25$$

x	d= x- A
١٩٠	- 60
٢٣٢	- 18
٢٥٠	0.0
٢٩٥	45
٣٠٤	54
المجموع	٢١

الطريقة الرابعة لحساب الوسط الحسابي باستخدام الوسط الحسابي الفرضي وكما يلي :-

$$x^{-} = A + \frac{\sum_1^n df}{\sum f}$$ حيث $F =$ التكرار ، الانحراف $= d = x - A$ ، $A =$ الوسط الحسابي الفرضي

مثال / الجدول التكراري التالي يمثل اطوال العمال في معمل معين(100 عامل) المطلوب حساب معدل طول العامل الواحد

الفئات (الأطوال)	التكرار(F)
160 - 162	٥
163 - 165	١٨
166 - 168	٤٢
169 - 171	٢٧
172 - 174	٨

الحل/نوجد مراكز الفئات و نختار $A = 167$ ونحسب قيمة df ونرسم الجدول

$$x^{-} = A + \frac{\sum_1^n df}{\sum f} = 167 + \frac{45}{100} = 167.45 \ cm$$

الفئات (الاطوال)	التكرار(F)	مراكز الفئات(X)	d = x - A	df
160 - 162	٥	١٦١	- 6	- 30
163 - 165	١٨	١٦٤	- 3	- 54
166 - 168	٤٢	١٦٧	0.0	0.0
169 - 171	٢٧	١٧٠	3	81
172 - 174	٨	١٧٣	6	48
المجموع	١٠٠			٤٥