الاسبوع الاول

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يجمع المصفوفات
2) يطرح المصفوفات
3) يضرب المصفوفات
4) يستخرج المحددات وقيمة (x,y,z)

Matrices (المصفوفات)

$we\ difine\ the\ matrix\ (A) of\ degree\ (m,n) as\ aset\ of\ real\ numbers$

$and\ we\ arrange\ these\ number\ in\ rows\ (columus) in\ a\ rectangular\ farm$

$between\ two\ brackets\ [\ \ ]\ \ and\ we\ write\ them\ as\ follons$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \ldots\ldots , \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

$were\ \ [a_{ij}]\ are\ the\ \ elements\ of\ \ \ (A)$

$Example : -\ \ let\ A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$then\ \ (A)\ \ is\ metrix\ of\ degree\ (2 \times 3) and\ has\ two\ rows\ and\ three\ columns$

$$a_{11} = 3\ , \quad a_{12} = 4\ , \quad a_{13} = 5\ , \quad a_{21} = 2\ , \quad a_{22} = 0\ , \quad a_{23} = -1$$

$Example : -\ \ let\ B = [1 \quad 5 \quad 0 \quad -3]$ this is a $metrix\ of\ degree\ (1 \times 4)$

$Example:-\ let\quad C=\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}$ this is a $metrix\ of\ degree\ (3\times 1)$

$Example:-\ let\ A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ this is a zero $metrix\ of\ degree\ (2\times 3)$

types of matrices : –

1) squre matrix : – $the\ matrix\ is\ called\ a$ squre matrix $if\ the\ degree\ (\ n\times n)$

2) Equal matrices: – the matrices (A, B) is called equal matrices if and only if has same degree , and $(a_{ij}=b_{ij})$

3) Diagonal matrix : – (المصفوفة القطرية)

A squre $matrix\ is\ called\ a$ Diagonal matrix $if\ a_{ij}\neq o\ at\ i=j\ and\ (a_{ij}=0\ at\ i\neq j)$

$Example:-\ let\ A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$ this is a Diagonal matrix $of\ degree\ (3\times 3)$

$becaues\ (a_{ij}\neq o\quad at\ i=j)\ and\ (a_{ij}=0\quad at\ i\neq j)$

4) $scalar\ matrix$: –(المصفوفة القياسية)

A squre $matrix\ is\ called\ a\ scalar\ matrix if (a_{ij}=c\neq o\ at\ i=j),(a_{ij}=0\ at\ i\neq j)$

$Example:-\ let\ A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ this is a $scalar\ matrix\ of\ degree\ (2\times 2)$

$becaues\quad a_{11}=a_{22}=2\ at\ i=j\ \ ,and\quad a_{12}=a_{21}=0\ at\ i\neq j$

5) $Identity\ matrix$: –(المصفوفة المحايدة)

$Ascalar\ matrix\ is\ called\ Identity\ matrix\ if\ a_{ij}=1\ at\ i=j\ and(a_{ij}=0\ at\ i\neq j)$

$Example:-\ let\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ this is a $Identity\ matrix\ of\ degree\ (3\times 3)$

$becaues \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1 \ \ at \ \ i = j \quad , and \qquad a_{ij} = 0 \ \ at \ i \neq j$

$operation\ on\ matrices$

$A)\ addition\ and\ subtraction:-$

$let \ \ A = \ [a_{ij}] \quad , B = [b_{ij}]$ $be\ two\ matrices\ of\ the\ same\ degree (m \times n) then$

1) $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ $is\ amatrix\ of\ the\ degree\ (m \times n)$

2) $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$ $is\ amatrix\ of\ the\ degree\ (m \times n)$

$Example: - \ \ let\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$Then \ \ A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+2 & 1+5 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

$and \ \ A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-2 & 1-5 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$B)\ multiplication\ a\ matrix\ by\ a\ number (or\ constant)\ K, KA = [Ka_{ij}]$

$Example: - \ \ let \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , K = 3$

$then \quad KA = 3A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 15 \\ 12 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$Example: - \ \ let \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \qquad K = \frac{1}{2}$

$then \quad KA = \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & {}^{3}/_{2} & {}^{5}/_{2} \\ 2 & 0 & {}^{1}/_{2} \end{bmatrix}$

C) commutative law (الخاصية التبديلية)

let $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ be two matrices of the same degree $(m \times n)$ then

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$$

xample :- let $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Then $A + B = \begin{bmatrix} 3+(-2) & 1+0 & 5+4 \\ 2+5 & -3+(-3) & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 7 & -6 & 10 \end{bmatrix}$

and $B + A = \begin{bmatrix} -2+3 & 0+1 & 4+5 \\ 5+2 & -3+(-3) & 6+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 7 & -6 & 10 \end{bmatrix}$

and so $A + B = B + A$

Example :- let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

then $A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-2 & 1-5 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

and $B - A = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 & 0-3 \\ 2-0 & 5-1 & -1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

and so $A - B \neq B - A$ (is no commutative

d) Addition law (قانون التجميع)

let A, B, C be matrices of the same degree $(m \times n)$

then $A + (B + C) = (A + B) + C$

Determinants (المحددات)

$$Example:-\ let\ A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}=2(5)-\ 4(3)=10-12=-2$$

$$Example:-let\ \ B=\begin{bmatrix}4 & 7 & 6\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}-7\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=\ 4(6-0)-7(4-3)+6(0-9)=24-7+63=80$$

$$Example:-let\ \ C=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 5 & 6 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}6 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}5 & 6\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$C=\ 3(24-2)-1(20-3)+0(10-18)=66-17+0=49$$

System of linear Equations

$$a_1x+b_1y+c_1z=k_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=k_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=k_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

then the equations (1),(2)*and* (3) *form* (تكون)*a system of 3 linear equations*

we want solve these equations to find the intersection point (x,y,z)(نقاط التقاطع)

to do this we use the deferminonts to solve these equations as follows

$$let\ \ A=\begin{bmatrix}a1 & b1 & c1\\ a2 & b2 & c2\\ a3 & b3 & c3\end{bmatrix}\ ,A_x=\begin{bmatrix}k1 & b1 & c1\\ k2 & b2 & c2\\ k3 & b3 & c3\end{bmatrix}\ ,A_y=\begin{bmatrix}a1 & k1 & c1\\ a2 & k2 & c2\\ a3 & k3 & c3\end{bmatrix}\ ,A_z=\begin{bmatrix}a1 & b1 & k1\\ a2 & b2 & k2\\ a3 & b3 & k3\end{bmatrix}$$

$$Then \qquad x=\frac{A_x}{A}\quad ,\quad y=\frac{A_y}{A}\quad ,z=\frac{A_z}{A}$$

Example : solve the following linear Equation by usind the determinants and check your result

1) $x+y+z=2$, 2) $2x-2y+z=0$, 3) $x+2y-z=4$

Solution: –

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&2&-1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}=1(1-2)-1(-2-1)+1(4+1)=7$$

$$Ax=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&1\\4&2&-1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}0&1\\4&-1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0&-1\\4&2\end{bmatrix}=2(1-2)-1(0-4)+1(0+4)=6$$

$$Ay=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&1\\1&4&-1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}0&1\\4&-1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}2&0\\1&4\end{bmatrix}=1(-4)-2(-2-1)+1(8-0)=10$$

$$Az=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}-1&0\\2&4\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}2&0\\1&4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}=1(-4-0)-1(8-0)+2(4+1)=-2$$

$$\therefore\ x=\frac{A_x}{A}=\frac{6}{7}=0.857\ ,\quad y=\frac{A_y}{A}=\frac{10}{7}=1.445\quad ,z=\frac{A_z}{A}=\frac{-2}{7}=-0.2857$$

athear method

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\\1&2\end{bmatrix}=1+1+4-(-1+2-2)=7$$

$$Ax=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&1\\4&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&1\\4&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&-1\\4&2\end{bmatrix}=2+4+0—(-4+4-0)=6$$

$$Ay=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&1\\1&4&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&1\\1&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&0\\1&4\end{bmatrix}=0+2+8-(0+4-4)=10$$

$$Az=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\\1&2\end{bmatrix}=-4+0+8-(-2+0+8)=-2$$

$$\therefore\ x=\frac{A_x}{A}=\frac{6}{7}=0.857\ ,\quad y=\frac{A_y}{A}=\frac{10}{7}=1.445\quad ,z=\frac{A_z}{A}=\frac{-2}{7}=-0.2857$$

Example : solve the following linear Equation by usind the determinants and check your result

1) $2x-3y+6z=-5$, 2) $4x+2y-3z=15$, 3) $2x-4y+10z=-6$

Solution: –

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 6\\4 & 2 & -3\\2 & -4 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 6\\4 & 2 & -3\\2 & -4 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & 2\\2 & -4\end{bmatrix}=40+18-96-(24+24-120)=34$$

$$Ax=\begin{bmatrix}-5 & -3 & 6\\15 & 2 & -3\\-6 & -4 & 10\end{bmatrix}=-5\begin{bmatrix}2 & -3\\-4 & 10\end{bmatrix}-(-3)\begin{bmatrix}15 & -3\\-6 & 10\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}15 & 2\\-6 & -4\end{bmatrix}=$$

$$Ax=-5(20-12)+3(150-18)+6(-60+12)=-40+396-288=68$$

$$Ay=\begin{bmatrix}2 & -5 & 6\\4 & 15 & -3\\2 & -6 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5 & 6\\4 & 15 & -3\\2 & -6 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -5\\4 & 15\\2 & -6\end{bmatrix}=300+30-144-(180+36-200)=170$$

$$Az=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\4 & 2 & 15\\2 & -4 & -6\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2 & 15\\-4 & -6\end{bmatrix}-(-3)\begin{bmatrix}4 & 15\\2 & -6\end{bmatrix}+(-5)\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & -4\end{bmatrix}=$$

$$Az=2(-12+60)+3(-24-30)-5(-16-4)=96-162+100=34$$

$$\therefore\ x=\frac{A_x}{A}=\frac{68}{34}=2\quad,\quad y=\frac{A_y}{A}=\frac{170}{34}=5\quad,z=\frac{A_z}{A}=\frac{34}{34}=1$$

proplam : solve the following linear Equation

1) $x-2y-4z=-26$, 2) $2x+3y-3z=-6$ 3) $4x+2y-3Z=-9$

Solution: –

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\2 & 3 & -3\\4 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\2 & 3 & -3\\4 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}=-9+24-16-(-48-6+12)=41$$

$$Ax=\begin{bmatrix}-26 & -2 & -4\\-6 & 3 & -3\\-9 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-26 & -2 & -4\\-6 & 3 & -3\\-9 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-26 & -2\\-6 & 3\\-9 & 2\end{bmatrix}=228-228=0$$

$$Ay = \begin{bmatrix} 1 & -26 & -4 \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & -9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -26 & -4 \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & -9 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -26 \\ 2 & -6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} = 18 + 312 + 72 - (96 + 27 + 156) = 123$$

$$x = \frac{A_x}{A} = \frac{0}{41} = 0 \qquad , \qquad y = \frac{Ay}{41} = \frac{123}{41} = 3$$

proplam : solve the following linear Equation

1) $x + 2y + 3z = 11$, 2) $3x - 2y - 2z = 3$, 3) $2x + 3y + 2z = 13$

1) $x + 2y + 3z = -6$, 2) $3x - 2y - 2z = 12$, 3) $x + y + z = -1$

1) $2x + 4y + 2z = -2$, 2) $5x - 5y - 5z = -15$, 3) $3x + 2y + 3z = -3$

1) $x - 2y - 4z = -26$, 2) $2x + 3y - 3z = -6$, 3) $4x + 2y - 3z = -9$

الاسبوع الثاني

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يجمع الاعداد المركبة

2) يطرح الاعداد المركبة

3) يضرب الاعداد المركبة

4) يقسم الاعداد المركبة

$Complex\ numbers$ (الاعداد المركبة)

العدد المركب :- هو زوج مرتب من مركبتين حقيقية وتخيلية ويكتب بالصيغة العامة التالية

$z = ax + byi$ ... حيث $(i) = \sqrt{-1}$, $ax =$ الجزء الحقيقي . $byi =$ الجزء التخيلي

$y = i^n$

عندما n تقبل القسمة على 4 بدون باقي فان $i^n = 1$

عندما n تقبل القسمة على 4 والباقي 2 فان $i^n = -1$

عندما n تقبل القسمة على 4 والباقي 1 فان $i^n = i$

عندما n تقبل القسمة على 4 والباقي 3 فان $i^n = -i$

$Exercise\ for\ complex\ numbers$

1) $let \quad z_1 = 3 + 4i \quad , \quad z_2 = 2 - i \quad , \quad z_3 = 4 + 3i$

$find \quad a)\ z_1 + 3z_2 \qquad b)\ z_1 - 4z_3 \qquad c)\ z_1 . z_2$

$d)\ (z_1 + z_2)^2 \qquad e)\ \dfrac{z_2}{z_3} \qquad f)\ z_1(z_3 + z_2)$

$g)\ z_1 . z_2 + z_1 . z_3 \qquad h)\ 3\,z_2 - 2z_1 \qquad i)\ |z_1 + z_2|$

$(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) = -2i$ حقق صحة مايلي

Solution: $= (\ \sqrt{2} - i\ - i + i^2\sqrt{2}) \ = \ -2i$

$(1-i)^4 = -4$ حقق صحة مايلي

Solution: $= (1-i)^2(1-i)^2 = (1-2i+i^2)(1-2i+i^2)$

$= 1-2i+i^2-2i+4i^2-2i^3+i^2-2i^3+i^4 = 1-4i+2i^2+4i^2-4i^3+i^4$

$= 1-4i-2-4+4i+1 = -4$ وبتعويض قيمة الأعداد التخيلية

$\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i} = -\frac{2}{5}$ حقق صحة مايلي

Solution: $\frac{5i+10i^2+6-8i-3i+4i^2}{15i-20i^2} = \frac{5i-10+6-8i-3i-4}{15i+20} = \frac{-6i-8}{15i+20} = \frac{-2(3i+4)}{5(3i+4)} = -\frac{2}{5}$

$\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{1}{2}i$ حقق صحة مايلي

Solution: $\frac{5}{(2-2i+i^2-i)(3-i)} = \frac{5}{6-6i+3i^2-3i-2i+2i^2-i^3+i^2} = \frac{5}{-10i} = \frac{1}{-2i} \times \frac{i}{i} = \frac{1}{2}i$

مثال 5/ جد قيمة $(x \;,\; y)$ التي تحققان المعادلة التالية $y+5i = (2x+i)(x+2i)$

الحل / نستخدم خاصية الضرب بين قوسين من الأعداد المركبة وهي

(الحقيقي × الحقيقي + التخيلي × التخيلي) + (الحقيقي × التخيلي + التخيلي ×الحقيقي)

$y+5i = (2x^2-2)+(4x+x)i = (2x^2-2)+(5xi)$

$\therefore 5i = 5xi \qquad \therefore x = 1$

$\therefore y = 2x^2-2 = 2(1)^2-2 = 0.0$

مثال 6/ : برهن صحة المعادلة التالية $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$

الحل :- نحلل الطرف الأيمن

$\frac{1}{(3-4i)}-\frac{1}{(3+4i)} == \frac{1}{(3-4i)} \times \frac{(3+4i)}{(3+4i)} - \frac{1}{(3+4i)} \times \frac{(3-4i)}{(3-4i)} =$

$= \frac{(3+4i)}{9+16}-\frac{(3-4i)}{9+16} = \frac{(3+4i)-(3-4i)}{25} = \frac{8i}{25}$ ويساوي الطرف الايسر

مثال 7/ – : برهن صحة المعادلة التالية $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$

Solution: –

$$\frac{(1-i)^2}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1-2i-1)(1-i)}{2}+\frac{(1+2i-1)(1+i)}{2}=\frac{-2-2i}{2}+\frac{-2+2i}{2}$$

$$=\frac{-1-i}{1}+\frac{-1+i}{1}=\frac{-1-i-1+i}{1}=-2$$ ويساوي الطرف الايسر

الاسبوع الثالث

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يجمع المتجهات

2) يطرح المتجهات

3) يضرب المتجهات

vectors

the vector is any quantity which has magnitude and direction

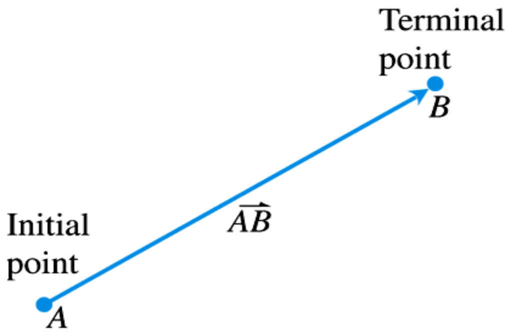


FIGURE 11.7 The directed line segment $\overrightarrow{AB}$.

$$v = a_i + b_j$$

then a_i , b_j *are the components of vector*

Examples: −*Draw the flowing vectors*

$$v_1 = a_1 i + b_1 j = 2i + j$$

$$v_2 = a_2 i + b_2 j = -3i + 4j$$

$$v_3 = a_3 i + b_3 j = -2i - 5j$$

length of a vector

let $(v = a_i + b_j)$ *be a vector we denotc to length of* (v) *is*

the length of vector $= |V| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Examples: −*Defind the length of the flowing vectors*

$v_1 = 2i + j \ldots\ldots\ldots\ldots \quad |V_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$v_2 = -3i + 4j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad |V_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$v_3 = -2i - 5j \ldots\ldots\ldots,,,,,. |V_3| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$.

Algebra of vectors: – 1) *Addition of vectors (resultant)*

let $U = u_1 i + u_2\, j \quad , \quad V = v_1 i + v_2\, j$

then : $U + V = (u_1 + v_1)i + (u_2 + v_2)j$

Example : –

let $U = 5i + 2\, j \quad , \quad V = 2i + 4\, j$

$U + V = (5 + 2)i + (2 + 4)j = 7i + 6j$

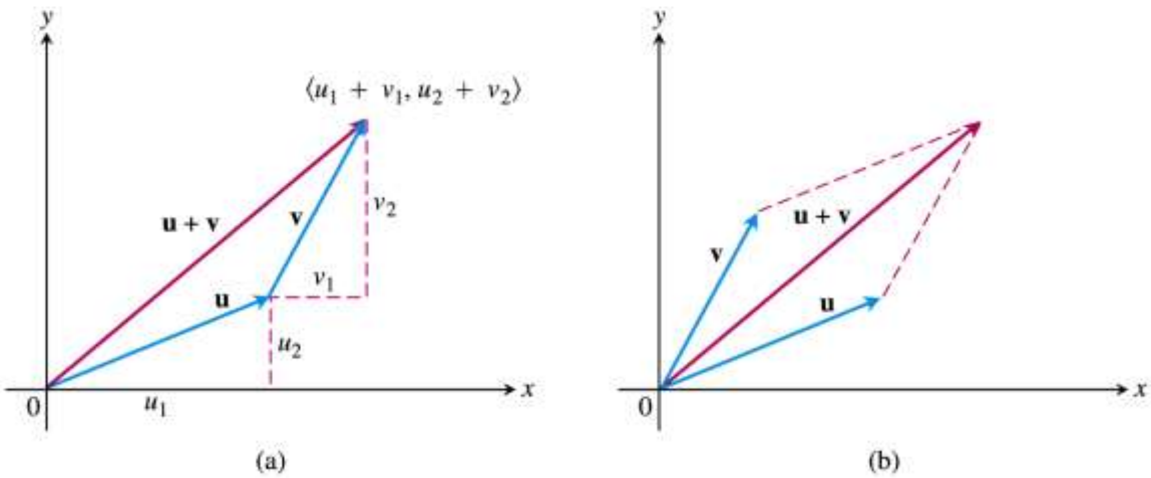


FIGURE 11.12 (a) Geometric interpretation of the vector sum. (b) The parallelogram law of vector addition.

2) *Subtraction*

let $U = u_1 i + u_2\, j \quad , \quad V = v_1 i + v_2\, j$

then : $U - V = (u_1 - v_1)i + (u_2 - v_2)j$

Example : –

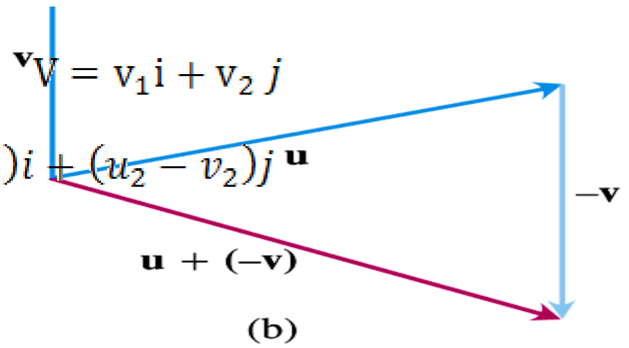


FIGURE 11.14 (a) The vector **u** − **v**, when added to **v**, gives **u**. (b) **u** − **v** = **u** + (−**v**).

$let \quad \mathrm{U} = 5\mathrm{i} + 2j \quad , \quad \mathrm{V} = 0 + 4j$

$\mathrm{U} - \mathrm{V} = (5-0)i + (2-4)j = 5i - 2j$

$Example : -$

$let \quad \mathrm{v}_1 = 3\mathrm{i} + 2j \quad , \quad \mathrm{v}_2 = 4\mathrm{i} - 3j$

$\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = (3+4)i + (2-3)j = 7i - j$

$\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 = (3-4)i + (2-(-3))j = -i + 5j$

$Definition\ (zero\ vector)$

$let \quad v = ai + bj = 0 \quad if\ and\ only\ if\ (a = 0 \quad , \quad b = 0)$

$Multiplication\ of\ a\ vector\ by\ scalar\ number$

$let \quad \mathrm{v}_1 = \mathrm{a}_1\mathrm{i} + \mathrm{b}_1 j \ \ be\ a\ vectorand\ \ (\beta) is\ areal\ number$

$then \quad \beta v = \beta(\mathrm{a}_1\mathrm{i} + \mathrm{b}_1 j) = \beta\, \mathrm{a}_1\mathrm{i} + \beta \mathrm{b}_1 j$

$Example : \quad let \quad \mathrm{v}_1 = 3\mathrm{i} - 4j \quad and \quad \beta = 2$

$then \quad \beta v_1 = \beta(\mathrm{a}_1\mathrm{i} + \mathrm{b}_1 j) = 2(3\mathrm{i} - 4j) = \ 6\mathrm{i} - 8j$

$when \quad \beta = 0 \ , then\ \beta v_1 = 0(3\mathrm{i} - 4j) = \ \mathrm{o}\ (zero\ vector)$

$Orthogonal\ vectors$

$let \quad \mathrm{v}_1 = \mathrm{a}_1\mathrm{i} + \mathrm{b}_1 j \quad , \quad \mathrm{v}_2 = \mathrm{a}_2\mathrm{i} + \mathrm{b}_2 j$

$Then \ \ v_1\ is\ Orthogonal\ to\ v_2\ if\ and\ only\ if \quad (v_1 . v_2) = 0$

$Example : \quad let \quad \mathrm{v}_1 = 3\mathrm{i} - 2j \quad and \quad \mathrm{v}_2 = -2\mathrm{i} - 3j$

$$then\ \ v_1 . v_2 = 3(-2) + (-2)(-3) = -6 + 6 = 0 \quad so \quad v_1 \perp v_2$$

الاسبوع الرابع

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) **يجمع اللوغارنمات**

2) **يطرح اللوغارتمات**

3) **يضرب اللوغارتمات**

$the\ logarithmic\ function$

اللوغاريتم :- هو ذلك الأس لو رفع إليه الأساس لنتج ذلك العدد.

$$y = \log_a x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots . a^y = x$$

$Examples: -$

$\log_{10} 100 = 2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 10^2 = 100$

$\log_4 16 = 2 \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 4^2 = 16$

$\log_{10} 1 = 0 \quad \ \ldots \ldots \ldots \ldots . . 10^0 = 1 \quad (\log 1 = 0)$

$\log_e x = \ln x$ ……………….. الطبيعي اللوغارتيم يسمى $e = 2.71828$

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

sumple lowe of the logarithmic function

1) $\log xy = \log x + \log y$

2) $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

3) $\log x^n = n \log x$

4) $\log x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log x = \frac{\log x}{n}$

1) *solve for each of the fellowing fanections .*

to impose $\log x = a$; $\log y = b$

find $\log(xy)$

solution : $x = 10^a$; $y = 10^b$

$xy = 10^a \times 10^b = 10^{a+b}$

$\log(xy) = \log x + \log y$

(2) to firm it : $\log 64 - 3\log 2 - 2\log 4 = \log \frac{1}{2}$

solution : –

$\log 2^6 - 3\log 2 - 2\log 2^2 = 6\log 2 - 3\log 2 - 4\log 2 = -\log 2$

$\therefore \log \frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 0 - \log 2 = -\log 2$

3) *solve for each of the fellowing fanections .*

$x^2 = 8y^3 \qquad , \qquad y = 2x^{\frac{1}{3}}$

- *solution* : −

$$\text{Log}\, y = \log 2x^{\frac{1}{3}} = \log 2 + \frac{1}{3}\log x$$

$$\text{Log}\, x^2 = \log 8y^3$$

$$2\log x = \log 8 + \log y^3 = 3\log 2 + 3\log y$$

$$2\log x = 3\log 2 + 3\left[\log 2 + \frac{1}{3}\log x\right]$$

$$2\log x = 3\log 2 + 3\log 2 + \log x = 6\log 2 + \log x$$

$$\text{Log}\, x = 6\log 2 = \log 2^6$$

$$\therefore \quad x = 2^6 = 64$$

$$x^2 = 8y^3 \to y^3 = \frac{x^2}{8} = \frac{64^2}{8} = \frac{8^4}{8} = 8^3$$

$$\therefore \quad y = 8$$

الاسبوع الخامس

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) **يجمع الغايات**

2) **يطرح الغايات**

3) يقسم ويضرب الغايات

The Limit Laws

The next theorem tells how to calculate limits of functions that are arithmetic combinations of functions whose limits we already know.

THEOREM 1 Limit Laws

If L, M, c and k are real numbers and

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{and} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M, \quad \text{then}$$

1. *Sum Rule*: $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

The limit of the sum of two functions is the sum of their limits.

2. *Difference Rule*: $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

The limit of the difference of two functions is the difference of their limits.

3. *Product Rule*: $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

The limit of a product of two functions is the product of their limits.

4. *Constant Multiple Rule:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

The limit of a constant times a function is the constant times the limit of the function.

5. *Quotient Rule*: $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

The limit of a quotient of two functions is the quotient of their limits, provided the limit of the denominator is not zero.

6. *Power Rule*: If r and s are integers with no common factor and $s \neq 0$, then

$$\lim_{x \to c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

provided that $L^{r/s}$ is a real number. (If s is even, we assume that $L > 0$.)

The limit of a rational power of a function is that power of the limit of the function, provided the latter is a real number.

EXAMPLE 1 Using the Limit Laws

(a) $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3)$ (b) $\lim_{x\to c}\dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ (c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2 - 3}$

Solution

(a) $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3$ — Sum and Difference Rules

$= c^3 + 4c^2 - 3$ — Product and Multiple Rules

(b) $\lim_{x\to c}\dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \dfrac{\lim_{x\to c}(x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x\to c}(x^2 + 5)}$ — Quotient Rule

$= \dfrac{\lim_{x\to c} x^4 + \lim_{x\to c} x^2 - \lim_{x\to c} 1}{\lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 5}$ — Sum and Difference Rules

$= \dfrac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$ — Power or Product Rule

(c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2 - 3)}$ — Power Rule with $r/s = \frac{1}{2}$

$= \sqrt{\lim_{x\to -2} 4x^2 - \lim_{x\to -2} 3}$ — Difference Rule

$= \sqrt{4(-2)^2 - 3}$ — Product and Multiple Rules

$= \sqrt{16 - 3}$

$= \sqrt{13}$

الاسبوع السادس

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يفاضل القيم الرياضية

• قواعد التفاضل Differentiation Rules

فى الصيغ الآتية u, v, w هى دالة قابلة للاشتقاق (للتفاضل) للمتغير x ، c و m ثابتان .

قاعدة 1 $$\frac{d}{dx}(c)=0$$

قاعدة 2 $$\frac{d}{dx}(x)=1$$

قاعدة 3 $$\frac{d}{dx}(u+v+\cdots)=\frac{d}{dx}(u)+\frac{d}{dx}(v)+\cdots$$

قاعدة 4 $$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{d}{dx}(u)$$

قاعدة 5 $$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$$

قاعدة 6 $$\frac{d}{dx}(uvw)=uv\frac{d}{dx}(w)+uw\frac{d}{dx}(v)+vw\frac{d}{dx}(u)$$

قاعدة 7 $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\frac{d}{dx}(u),\ c\neq 0$$

قاعدة 8 $$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right)=c\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{c}{u^2}\frac{d}{dx}(u),\ u\neq 0$$

قاعدة 9 $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2},\ v\neq 0$$

قاعدة 10 $$\frac{d}{dx}(x^m)=mx^{m-1}$$

قاعدة 11 $$\frac{d}{dx}(u^m)=mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$$

مثال 2-3 : فاضل : $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$

Example 2-3: Differentiate $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$

$$\frac{dy}{dx}=0+2(1)-3(2x)-5(3x^2)-8(4x^3)+9(5x^4)$$
$$=2-6x-15x^2-32x^3+45x^4$$

مثال 2-4 : فاضل : $y=\dfrac{3-2x}{3+2x}$

Example 2-4: Differentiate $y=\dfrac{3-2x}{3+2x}$

$$y'=\frac{(3+2x)\dfrac{d}{dx}(3-2x)-(3-2x)\dfrac{d}{dx}(3+2x)}{(3+2x)^2}$$
$$=\frac{(3+2x)(-2)-(3-2x)(2)}{(3+2x)^2}=\frac{-12}{(3+2x)^2}$$

الاسبوع السابع

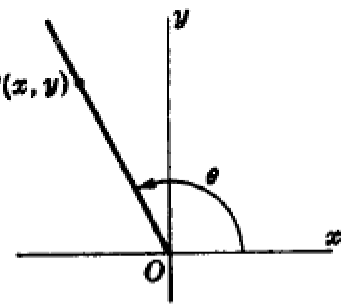
الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يفاضل الدوال المثلثية

الدوال المثلثية Trigonometric Functions

دع θ أى عدد حقيقى . ارسم الزاوية التى قياسها θ rad وقيمتها عند نقطة الأصل فى نظام المحاور المتعامدة بحيث يكون ضلعها الأول منطبق على محور x (انظر شكل 2-4) .



شكل 4-2

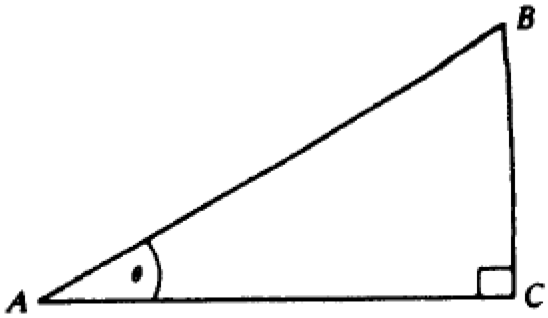
خذ النقطة $P(x, y)$ على الضلع الثانى للزاوية على بعد وحدة المسافات من 0 . إذن نعرف الدوال $\sin\theta = y$ و $\cos\theta = x$.

مجال التعريف لكل من $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هو فئة الأعداد الحقيقية ، ومدى $\sin\theta$ هو $-1 \le y \le 1$ ومدى $\cos\theta$ هو $-1 \le x \le 1$. بمعلومية أنه لو θ هى زاوية حادة للمثلث القائم ABC (انظر شكل 4-3) ، إذن

$$\sin\theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \frac{BC}{AC}$$



شكل 4-3

الميل m للخط المائل هو tan α حيث إن α زاوية مقاس فى عكس اتجاه عقارب الساعة من محور x الموجب إلى الخط المائل .

جدول 4-1 : يعرف بعض الدوال المثلثية القياسية وجدول 4-2 يبين بعض القيم المهمة للدوال المثلثية .

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha,\ \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha,\ \tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha,\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	∞
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	∞

جدول 4-2

الصيغ التفاضلية Differentiation Formulas

الآن يمكن أن نعرف الدوال المثلثية للمتغير x (مفضلاً عن الرمز إلـى الزاوية بالرمز θ) .

قاعدة 14 $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ قاعدة 15 $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

قاعدة 16 $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$ قاعدة 17 $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$

قاعدة 18 $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x \tan x$ قاعدة 19 $\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x \cot x$

مثال 4-1 : أوجد المشتقة الأولى للمعادلة $y = \sin 3x + \cos 2x$

Example 4-1: Find the first derivative of $y = \sin 3x + \cos 2x$.

$$y' = \cos 3x \frac{d}{dx}(3x) - \sin 2x \frac{d}{dx}(2x) = 3 \cos 3x - 2 \sin 2x$$

مثال 4-2 : أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

Example 4-2: Find the first derivative of $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

$$f'(x) = \frac{x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$$

الاسبوع الثامن

الاهداف

سيكون الطالب بعد نـهاية الدرس قادر على أن:

1) يفاضل مشتقة الدوال الاسية واللوغارتمية

The Exponent functions

$$y = e^x$$

$$y = e^u$$

The derivatives of logarithmic function

(1) $\frac{d(\ln v)}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$

(2) $\frac{d(\log v)}{dx} = \frac{\log e}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$

(3) $\frac{d(a^v)}{dx} = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$

(4) $\frac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u \,.\, u^v \frac{dv}{dx}$

The derivatives of Exponent functions

(1) $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$ ………… , (2) $\frac{d(e^u)}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$

$Examples: - find \ \dfrac{dy}{dx}$

(1) $y = \ln(3x^2 + 5x - 4)$ ……… $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x+5}{3x^2+5x-4}$

(2) $y = \log(3x^2 + 4)$ …. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log e}{(3x^2+4)} 6x = \dfrac{6x}{(3x^2+4)} \log e$

(3) $y = 3^{\sin 2x}$ ….. $\dfrac{dy}{dx} = 3^{\sin 2x} \ \ln 3 \ \ (2\cos 2x)$

(4) $y = (x^2+4)^{\cos 3x}$ …, $u = x^2 + 4$, $v = \cos 3x$

$\frac{dy}{dx} = \cos 3x \ \ (x^2+4)^{(\cos 3x)-1} \ (2x) + \ \ln(x^2+4) \ \ (x^2+4)^{\cos 3x} \ \ - 3 \sin 3x$

$Examples: - find \ \frac{dy}{dx}$

(1) $y = e^{3x}$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$$

(2) $y = e^{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x$$

(3) $y = e^{\sqrt{3x^2+5}}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{3x^2+5}} \left(\frac{1}{2}\right) (3x^2+5)^{-\frac{1}{2}} (6x)$$

(4) $y = e^{2x+1}$

$$.\frac{dy}{dx} = 2 \ \ e^{2x+1}$$

(5) $y = e^{\sqrt{x+1}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$$

(6) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})}{2}$$

(7) $y = e^{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\ln x}}{x}$$

(8) $y = x^2 e^x$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 e^x + e^x(2x) = e^x(x^2 + 2x)$$

(9) $y = \sqrt{x-1} \;\; e^{\sqrt{x-1}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{x-1}) \;\; e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}} + \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x-1} \; +1) \;\; e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}}$$

الاسبوع التاسع

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يفاضل بطريقة السلسلة

قاعدة السلسلة (التفاضل بطريقة السلسلة)

THEOREM 3 The Chain Rule

If $f(u)$ is differentiable at the point $u = g(x)$ and $g(x)$ is differentiable at x, then the composite function $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ is differentiable at x, and

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

In Leibniz's notation, if $y = f(u)$ and $u = g(x)$, then

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

where dy/du is evaluated at $u = g(x)$.

مثال — :اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلات التالية

$$y = 3u^2 + 1 \quad , \quad u = 2x - 3$$

الحل / نوجد $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$ وكما يلي

$$\frac{dy}{du} = 6u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 6u(2) = 12u$$

$$\frac{dy}{dx} = 12(2x - 3) = 24x - 36$$

مثال — :اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلات التالية

$$y = u - 2u^2 \quad , \quad u = 3x^2 - 7$$

الحل / نوجد $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$ وكما يلي

$$\frac{dy}{du} = 1 - 4u \quad : \quad \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (1 - 4u)6x = 6x - 24xu = 6x - 24x(3x^2 - 7)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 72x^2 + 168x = -72x^2 + 17x$$

مثال– :اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلات التالية

$$y = t^2 + 2t \qquad , \qquad x = 1 - 2t$$

الحل / نوجد $\frac{dy}{dt}$ و $\frac{dx}{dt}$ وكما يلي

$$\frac{dy}{dt} = 2t + 2 \qquad : \frac{dx}{dt} = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{2t+2}{-2} = -t - 1$$

مثال– :اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلات التالية

1)	$y = t^2 - 2t$,	$t = 4 + x^2$
2)	$y = \sqrt{t}$,	$t = 1 + \frac{1}{x}$
3)	$y = \frac{u}{u+1}$,	$u = x^2 + 1$
4)	$y = 3u^2 + 4$,	$u = 3x + 2$
5)	$y = \frac{1}{t+1}$,	$x = \frac{1}{t+1}$

الاسبوع العاشر

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يفاضل بطريقة التفاضل الضمني

الاشتقاق الضمني

مثال– :اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلة $x^2 + 2xy = 4$

الحل / نوجد y بدلالة x ثم نكمل التفاضل المعتاد وكما يلي

$$y = \frac{4-x^2}{2x} = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(0)-2(1)}{x^2} - \left[\frac{2(1)-x(0)}{4}\right] = \frac{-2}{x^2} - \frac{1}{2} =$$

اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للدالة $f(x) = \ \ y^4 - xy^2 + x^2 - 7 \ = 0$

في هذه الحالة يتعذر إيجاد y بدلالة x ولأجله سنوضح طريقة المفاضلة الضمنية لكي نجد $\frac{dy}{dx}$ وهي كما يأتي نفاضل كل حد بالنسبة إلى (x) وفق قوانين التفاضل السابقة فنحصل على

$$4y^3\frac{dy}{dx} - \left(x2y\frac{dy}{dx} + y^2(1)\right) + 2x - 0 = 0$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(4y^3 - 2xy) = y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-2x}{4y^3-2xy}$$

اوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ للدالة $f(x) = \ \ x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$

الحل :- نشتق المعالة بالاشتقاق الضمني

$$3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + 2yx - 40y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2\frac{dy}{dx} - 40y^3\frac{dy}{dx} = -3x^2 - 2yx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2-2yx}{x^2-40y^3} =$$

جد معادلة المماس للقطع الزائد $4x^2 - 9y^2 = 36$ في النقطة $(6 \ \ ,2\sqrt{3})$

جد معادلة مماس الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(-3 \quad , \quad 4)$

اوجد المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ للدالة $y^2 = 2x^3$

الاسبوع الحادي عشر

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يحسب نقاط النهايات العظمى والصغرى

---

the critical points of function

---

the largest critical point and smallest critical point

Ex:—find the largest and smallest critical point of the function $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

.

$$solution:-\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$$

$$4x = 0 \quad , \quad \therefore \quad x = 0 \qquad \text{اما} \quad ,$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad , \quad \therefore \quad x = \pm 1 \qquad \text{او} \quad ,$$

$\therefore$ *largest critical point at* $x = 0$

and smallest critical point at $x = \pm 1$

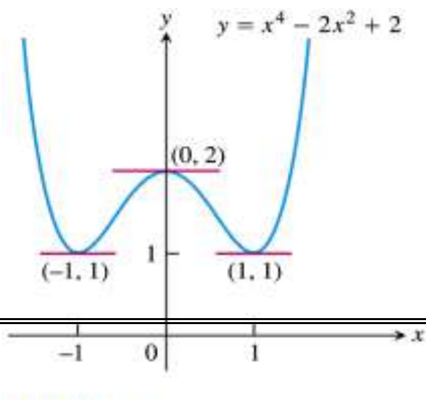


FIGURE 3.8 The curve

$Ex{:}-find\ the\ largest\ \ and\ \ smallest\ critical\ point\ \ of\ the\ function\quad y = x^3 - 12x - 5$

$solution{:}-\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 12 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(x^2) = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x = \pm 2$

, $\therefore$ $largest\ critical\ \ point\quad at\quad x = -2$,

, $and\ \ smallest\ critical\ point\quad at\quad x = 2$,

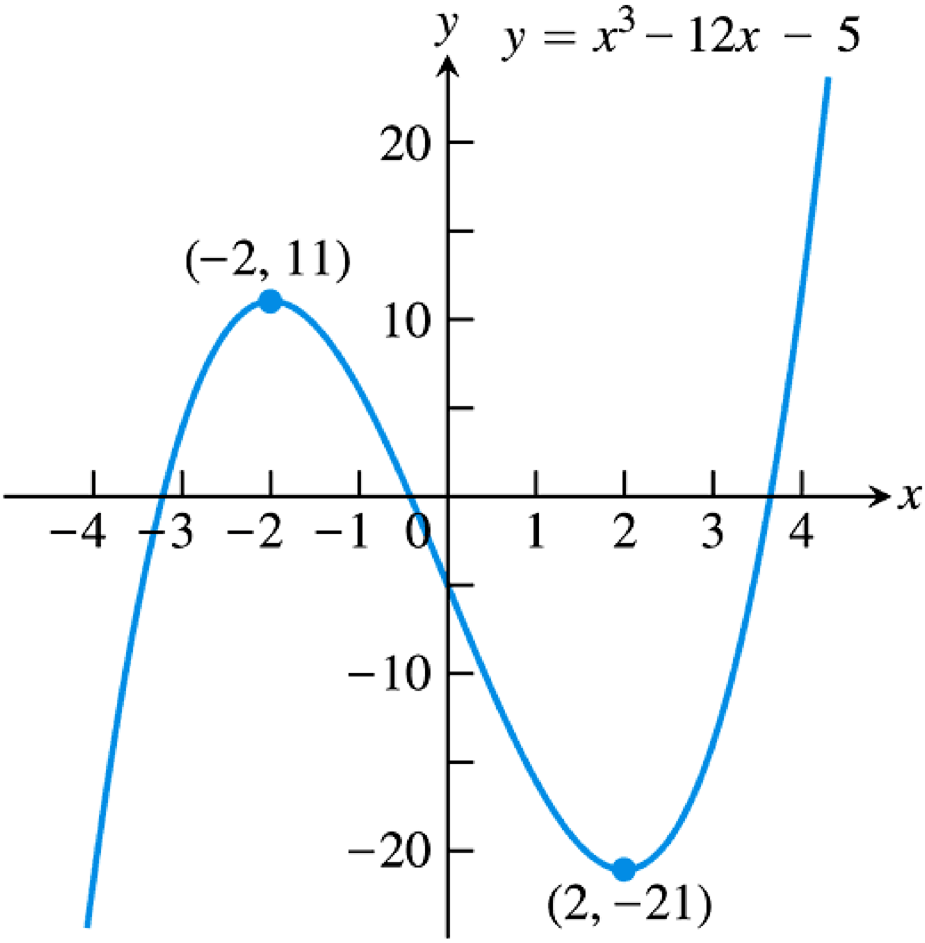


FIGURE 4.21 The function $f(x) = x^3 - 12x - 5$ is monotonic on three separate intervals (Example 1).

$Ex: -find\ the\ largest\ \ and\ \ smallest\ critical\ point\ \ of\ the\ function$

$f(x) = y = \ \cos x \quad on \qquad [-\pi \ , \qquad \pi]$

$solution: -\frac{dy}{dx} = -\sin x = 0$

$-\sin x = 0 \qquad , \qquad \therefore \ \ x = 0$ اما

او $-\sin x = 0 \qquad , \qquad \therefore \ \ x = \pm\pi$

$, \qquad \therefore \quad largest\ critical\ \ point \quad at \quad x = 0$

$, \qquad and\ \ smallest\ critical\ point \quad at \quad x = \pm\pi$

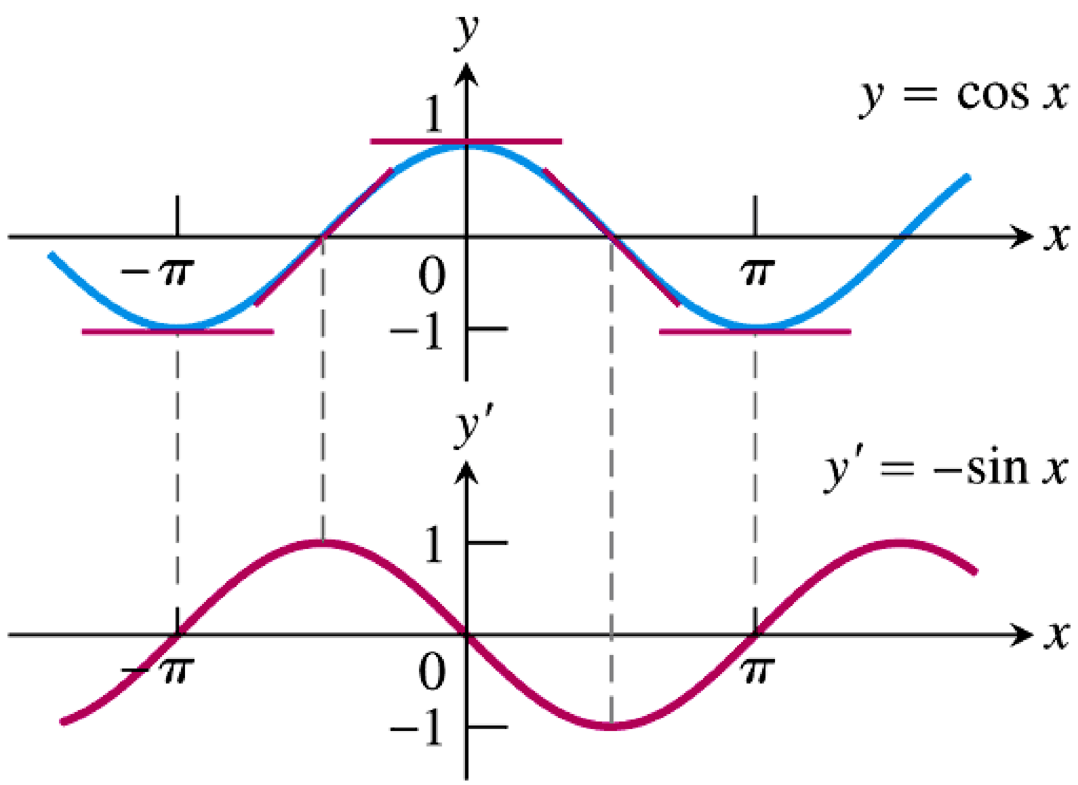


FIGURE 3.17 The curve $y' = -\sin x$ as the graph of the slopes of the tangents to the curve $y = \cos x$.

$Ex:-find\ the\ critical\ point\ of\ the\ function\ \ y=x^2\ \ on\ [-2\ \ ,\ 2]$

$solution:-\frac{dy}{dx}=2x=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\therefore x=0$

$smallest\ critical\ point\quad at\quad x=0$

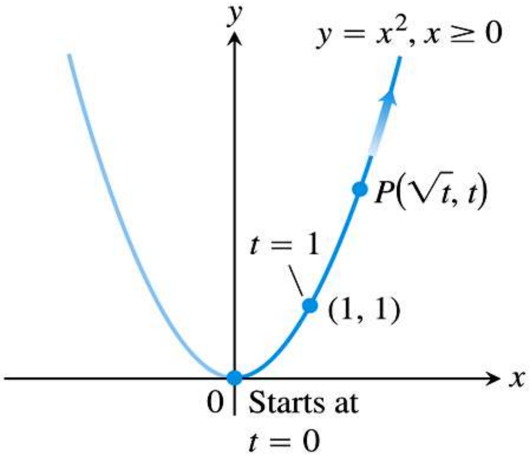


FIGURE 3.41 The equations $x = \sqrt{t}$ and $y = t$ and the interval $t \geq 0$ describe the motion of a particle that traces the right-hand half of the parabola $y = x^2$ (Example 2).

جد القيمة العظمى والصغرى للدالة $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$ للفترة المغلقة $(-3\ \ ,3)$

$solution:-\frac{dy}{dx}=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)=0$

$(x-1)=0 \quad , \; x=1$ اما

$x+2=0 \quad , \quad x=-2$

الاسبوع الثاني عشر

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يكامل القيم الرياضية

$Integration$ (التكامل)

1) $\int u^n\,du=\left[\frac{(u)^{n+1}}{(n+1)}\right]+c$

2) $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c$

3) $\int e^u du=e^u+c$

4) $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+c$

5) $\int \sin u\;du=-\cos u+c$

6) $\int \cos u\;du=\sin u+c$

7) $\int \sec u\tan u\;du=\sec u+c$

8) $\int \csc u\cot u\,du=-\csc u+c$

9) $\int \sin^2 u\,du=\frac{1}{2}\left[u-\frac{1}{2}\sin 2u\right]+c$

10) $\int \cos^2 u\,du=\frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]+c$

11) $\int \sec^2 u\,du=\tan u+c$

12) $\int \csc^2 u\,du=-\cot u+c$

13) $\int \frac{\log e}{u}du=\log u+c$

14) $\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln|a|}+c$ (a عدد حقيقي)

15) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c \;\; = -\cos^{-1} u + c \qquad , \; |u| < 1$

16) $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + \; c \;\; = -\cot^{-1} u + c$

17) $\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + \; c = -\csc^{-1} u + c \qquad ,|u| > 1$

---

find the integration of the following functions

1) $\int 7x dx = \frac{7}{2} x^2 + c$

2) $\int 4x^3 \, dx = \frac{4}{4} x^4 + c = x^4 + c$

3) $\int 15 dx = 15x + c$

4) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$

5) $\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + c$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$

7) $\int (x+1) \, dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 + c$

8) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{7x^5} dx = \int \left[\frac{1}{7x^2} - \frac{2}{7x^3} + \frac{1}{7x^5} \right] dx$

$= -\frac{1}{7x} + \frac{1}{7x^2} - \frac{1}{28x^4} + c = \frac{-4x^3 + 4x^2 + 1}{28x^4} + c$

9) $\int \left(\sqrt{3x} + 5 \right) dx = \frac{2}{\sqrt{3}} x^{\frac{3}{2}} + 5x + c$

10) $\int (3x^2 - 2x + 1) \, dx = x^3 - x^2 + x + c$

11) $\int \sqrt{2x+1} \, dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$

12) $\int \left(\frac{1}{x^2} + x \right) dx = \int (x^{-2} + x) \, dx = -x^{-1} + \frac{x^2}{2} + c = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2} x^2 + c$

13) $\int x^2 \sqrt{7x^3 + 5} \;\; dx = \int x^2 (7x^3 + 5)^{\frac{1}{2}} dx \; = \frac{1}{21} \int 21x^2 (7x^3 + 5)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{1}{21} \times \frac{2}{3} (7x^3 + 5)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{63} (7x^3 + 5)^{\frac{3}{2}} + c$

14) $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$

15) $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c$

16) $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c$

17) $\int \sec^3 3x \tan 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \sec^2 3x \tan 3x \sec 3x \;\, 3 \, dx$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \sec^3 3x + c = \frac{1}{9} \;\; \sec^3 3x + c$

18) $\int \cos 5x\, dx = \frac{1}{5}\sin 5x + c$

19) $\int \sin^3 6x \cos 6x\, dx = \frac{1}{6}\int \sin^3 6x \cos 6x\, 6dx = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\sin^4 6x \ + c$

20) $\int \cos\frac{1}{3}x \sin\frac{1}{3}x\, dx = 3\int \cos\frac{1}{3}x \sin\frac{1}{3}x\frac{1}{3}dx = \frac{3}{2}\sin^2\frac{1}{3}x + c$

21) $\int \frac{4x}{2x^2+1}dx = ln(2x^2+1)+c$

22) $\int \frac{(x+1)}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}ln(x^2+2x+2)+c$

23) $\int \frac{1}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+3}dx = \frac{1}{2}ln(2x+3)+c$

24) $\int \frac{\sin x}{2-\cos x}dx = ln(2-\cos x)+c$

25) $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln\cos x + c$

26) $\int \tan^2 3y\, dy = \int (\sec^2 3y - 1)\, dy$

$= \frac{1}{3}\int \sec^2 3y\ 3\, dy - \int dy = \frac{1}{3}\tan 3y - y + c$

27) $\int (\sin x + \cos x)^2\, dx$

$= \int (\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x)\, dx = \int (1+\sin 2x)\, dx$

$= x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

28) $\int \cos^2(3x^2+5)\times\sin(3x^2+5)x dx \quad = \frac{\cos^3(3x^2+5)}{18} + c$

الاسبوع الثالث عشر

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يكامل بطريقة التجزئة

التكامل بطريقة تجزئة الكسور

1) $\int \frac{(5x+3)}{x^3-2x^2-3x}dx = \int \frac{(5x+3)}{x(x-2x-3)}dx = \int \frac{(5x+3)}{x(x+1)(x-3)}dx$

$\frac{(5x+3)}{x(x+1)(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{k}{x-3} = \frac{a(x+1)(x-3)+bx(x-3)+kx(x+1)}{x(x+1)(x-3)}$

$= \frac{ax^2-3ax+ax-3a+bx^2-3bx+kx^2+kx}{x(x+1)(x-3)} = \frac{(5x+3)}{x(x+1)(x-3)}$

$ax^2 - 3ax + ax - 3a + bx^2 - 3bx + kx^2 + kx = (5x + 3)$

$-3a = 3$

$-2a - 3b + k = 5$

$a + b + k = 0$

$a = -1 \quad : \quad b = -\frac{1}{2} \quad : \quad k = \frac{3}{2}$

$\int \frac{(5x+3)}{x(x+1)(x-3)}dx = \int \left[\frac{-1}{x} + \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x-3)}\right]dx =$

$-\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{3}{2}\ln(x-3) + c$

2) $\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}dx =$

$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{a}{(x+3)} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{k}{(x-1)^2} =$

$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2+b(x+3)(x-1)+k(x+3)}{(x+3)(x-1)^2} =$

$= \frac{a(x-1)^2+b(x+3)(x-1)+k(x+3)}{(x+3)(x-1)^2}$

$= \frac{ax^2-2ax+a+bx^2+2bx-3b+kx+3k}{(x+3)(x-1)^2} =$

$a + b = 3$

$2a - 2b - k = 8$

$a - 3b + 3k = 13$

$a = 3 - b$

$2(3-b) - 2b - k = 8 = 6 - 4b - k$

$k = -2 - 4b$

$(3 - b) - 3b + 3(-2 - 4b) = 13$

$-16b = 16$

$a = 4 \qquad : b = -1 \qquad : \quad k = 2$

$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} dx = \int \frac{4}{(x+3)} dx + \int \frac{-1}{(x-1)} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx =$

$= 4\ln(x + 3) - ln(x - 1) - 2(x - 1)^{-1} + c$

الاسبوع الرابع عشر

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يكامل بالتعويض

التكامل بالتعويض

مثال/1 اوجد التكامل التالي $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

الحل :- نفرض $u = \sqrt{x}$ ثم نوجد المشتقة $\frac{du}{dx}$ والتي تساوي $du = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

ثم نعوض قيمة du , u في المعادلة الأصلية فتكون

$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \sin u \;\, du \;= -2\;\cos u \; du \;+ c \;= -2\cos\sqrt{x} + c$

مثال/2 اوجد التكامل التالي $\int \frac{\sec^2(\sin x)}{\sec x} dx$

الحل :- نفرض $u = \sin x$ ثم نوجد المشتقة $\frac{du}{dx}$ والتي تساوي $du = \;\cos x\, dx$

ثم نعوض قيمة du , u في المعادلة الأصلية فتكون

$\int \frac{\sec^2(\sin x)}{\sec x} dx = \int \sec^2(\sin x) \cos x\, dx = \int \sec^2(u)\, du$

$$= \tan u + c = \tan(\sin x) + c$$

مثال/3 اوجد التكامل التالي $\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx$

الحل :- نفرض $u = a^2 - x^2$ ثم نوجد المشتقة $\frac{du}{dx}$ والتي تساوي $du = -2x dx$

ثم نعوض قيمة du , u في المعادلة الأصلية فتكون

$$\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln u + c =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(a^2 - x^2) + c$$

الاسبوع الخامس عشر

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يكامل بالتجزئة

التكامل بالتجزئة

ويستند على عكس صيغة اشتقاق حاصل ضرب دالتين وكما مبين .

لتكن(v , u) دالتين لـ (x) تعرف لهما مشتقتان مستمرتان

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

نحصل على (x)وبتكامل كلا الطرفين لهذه المعادلة بالنسبة الى

$$u\,v = \left(\int u\,dv + \int v\,du \right)$$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \qquad ,$$

وهذه تعرف بصيغة التكامل بالتجزئة

مثال/1 اوجد التكامل التالي $\int x\cos x\,dx$

نفرض $dv = \cos x dx$, $u = x$ ثم نوجد du , v وكما يلي

$v = \sin x$ …………………. $du = dx$

وباستخدام قانون التكامل بالتعويض

$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$

$= x\sin x + \cos x + c$

مثال/2 اوجد التكامل التالي $\int x^2\cos x\,dx$

نفرض $dv = \cos x dx$, $u = x^2$ ثم نوجد du , v وكما يلي

$v = \sin x$ ……………………… $du = 2xdx$

وباستخدام قانون التكامل بالتعويض

$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$ …………… (1)

وبما أن الحد الثاني هو تكامل دالتين فنطبق القانون مرة أخرى

$\int 2x\sin x\,dx =$

نفرض $dv = \sin x\,dx$, $u = 2x$ ثم نوجد du , v وكما يلي

$v = -\cos x$ ……………………… $du = 2dx$

$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$ ………………. $\int 2x\sin x\,dx = 2x(-\cos x) - \int -\cos x\,2dx$

$= -2x\cos x + 2\sin x$ ……………. (2)

ثم نعوض معادلة (2) في معادلة رقم (1) فنحصل على

$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - (-2x\cos x + 2\sin x)$

$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

مثال/3 اوجد التكامل التالي $\int x^2\sin x\,dx$

نفرض $dv = \sin x dx$, $u = x^2$ ثم نوجد du , v وكما يلي

$v = -\cos x$

$du = 2xdx$

وباستخدام قانون التكامل بالتعويض

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2(-\cos x) - \int(-\cos x)2x\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وبما أن الحد الثاني هو تكامل دالتين فنطبق القانون مرة أخرى

$$\int -2x\cos x\,dx =$$

نفرض $dv = -\cos x\,dx$, $u = 2x$ ثم نوجد du , v وكما يلي

$$v = -\sin x$$

$$du = 2dx$$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int -2x\cos x\,dx = 2x(-\sin x) - \int(-\sin x)2dx$$

$$= -2x\sin x - 2\cos x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

ثم نعوض معادلة (2) في معادلة رقم (1) فنحصل على

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x - \int -2x\cos x\,dx$$

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

==================================

الاسبوع السادس عشر

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يستخدم التكاملات المثلثية

بعض المتطابقات المثلثية المستخدمة في التكاملات

$$1)\quad \sin ax\cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$$

$$2)\quad \sin ax\sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$3)\quad \cos ax\cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$

مثال/1 اوجد التكامل التالي $\int \sin 6x\sin x\,dx$

الحل/ باستخدام المتطابقة

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\sin x \sin 6x = \frac{1}{2}[\cos(6-1)x - \cos(6+1)x]$$

$$\sin x \sin 6x = \frac{1}{2}[\cos(5x) - \cos(7x)]$$

$$\int \sin x \sin 6x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(5x)\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(7x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\sin(5x) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}\sin 7x + c$$

$$= \frac{1}{10}\sin(5x) - \frac{1}{14}\sin 7x + c$$

مثال/2 اوجد التكامل التالي $\int \cos 3x \cos x\, dx$

الحل / باستخدام المتطابقة الملائمة

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$

$$\cos 3x \cos x = \frac{1}{2}[\cos(3-1)x + \cos(3+1)x]$$

$$\int \cos 3x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

مثال/3 اوجد التكامل التالي $\int \cos^3 2x\, dx$

الحل /

$$\int \cos^3 2x\, dx = \int \cos^2 2x \cos 2x\, dx = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\, dx$$

$$= \int \cos 2x\, dx - \int \sin^2 2x \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + c$$

مثال/4 اوجد التكامل التالي $\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx$

الحل /

$$\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx = \int \cos x \cos^2 x \sin^2 x\, dx$$

نفرض ان $du = \cos x\, dx$, $u = \sin x$ نحصل على

$$\int (1-\sin^2 x)\sin^2 x \cos x\, dx = \int (1-u^2)\, u^2\, du$$

$$= \int (u^2 - u^4)\, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

الاسبوع السابع عشر

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يستخدم التقريب بالتكامل

التقريب في التكامل المحدد

إضافة إلى الطرق التي درستاها سابقا في التكامل المحدد هناك طريقتان لتقريب قيمة التكامل المحدود هما
1) الطريقة الأولى تسمى قاعدة شبه المنحرف .

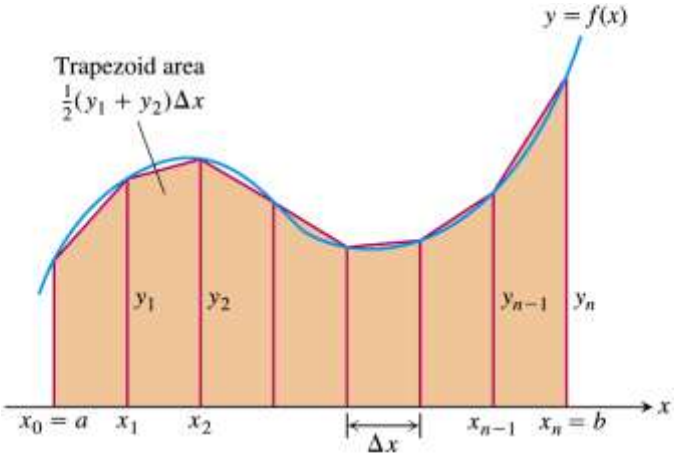


FIGURE 8.7 The Trapezoidal Rule approximates short stretches of the curve $y = f(x)$ with line segments. To approximate the integral of f from a to b, we add the areas of the trapezoids made by joining the ends of the segments

ثم نستخرج قيمة $\Delta x = \frac{B-A}{n}$ حيث تمثل المسافة بين جزء وآخرثم ن

نوجد مساحة كل جزء وذلك بإيجاد حاصل ضرب نصف مجموع طول الضلعين المتوازيين مضروب في المسافة بينهما وكما يلي

$$A_1 = \frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]\Delta x$$

والمجموع لهذه المساحات هو تقريب للمساحة المحدودة بالمحور x والمخطط $y = f(x)$ والمستقيمين الرأسيين $x = A$, $x = b$ وعليه تكتب بالصيغة التالية

$$\int_A^B f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) \ldots\ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

حيث $\Delta x = \frac{B-A}{n}$ و $x_i = A + i\Delta x$

وعليه فان مجموع مساحات أشباه المنحرفات يكون قريبا من التفاضل المطلوب ولو اعتبرنا الرمز $\cong$ يدل على التساوي التقريبي

$$\therefore \int_A^B f(x) \cong \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots\ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

The Trapezoidal Rule

To approximate $\int_a^b f(x)\,dx$, use

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$

The y's are the values of f at the partition points

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b,$$

where $\Delta x = (b - a)/n$.

الاسبوع التاسع عشر

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يستخدم قاعدة سمبسون

الطريقة الثانية تسمى قاعدة سمبسون Simpson Rule .

في هذه الطريقة نقسم الفترة إلى عدد من الفترات (n) المتساوية ولكن يشترط ان يكون عدد الاقسام زوجي .

لتكن نقطة (x_1) تمثل منتصف الفترة $(x_0\ ,\ x_2)$ التي طولها $2h$ وعندئذ تكون

$$x_0 = x_1 - h \qquad , x_2 = x_1 + h$$

تأمل أن لديك ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة هي

$$p_0(x_1 - h\ , y_0) \quad , \quad p_1(x_1\ , y_1) \quad , \quad p_2(x_1 + h\ , y_2)$$

كما في الشكل أعلاه أي أنها تمثل قطع مكافئ ذو محور أساسي راسي له معادلة بالصيغة $y = Ax^2 + Bx + C$ ويمر هذا القطع بالنقاط $p_0\ ,\ p_1\ ,\ p_2$ وبتطبيق معادلة القطع المكافئ على النقاط الثلاثة نحصل على

$$y_0 = A(x_1 - h)^2 + B(x_1 - h) + C$$
$$y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C$$
$$y_2 = A(x_1 + h)^2 + B(x_1 + h) + C$$

ثم نوجد قيمة $y_0 + 4y_1 + y_2$ والتي تساوي

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6Ax_1^2 + 2Ah^2 + 6Bx_1 + 6C$$

ثم نحسب مساحة المنطقة المحددة بالقطع المكافئ والمحور x والمستقيمين $(x_1 - h)$, $(x_1 + h)$

فيكون لدينا تكامل محدد هو

$$\int_{x_1-h}^{x_1+h} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[\frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx\right]_{x_1-h}^{x_1+h}$$

$$= \frac{A}{3}[(x_1+h)^3 - (x_1-h)^3] + \frac{B}{2}[(x_1+h)^2 - (x_1-h)^2] + \ C[(x_1+h) - (x_1-h)]$$

$$= \frac{h}{3}[A(6x_1^2 + 2h^2) + B(6x_1) + 6C\ ]$$

وبما ان المقدار

$$[A(6x_1^2 + 2h^2) + B(6x_1) + 6C\ ] = [y_0 + 4y_1 + y_2]$$

$$\therefore \int_{x_1-h}^{x_1+h} = \frac{h}{3}\ [y_0 + 4y_1 + y_2]$$

و بأخذ عدة نقاط للشكل يكون التكامل بالصيغة التالية

$$\int_A^B f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

EXAMPLE 2 Use Simpson's Rule with $n = 4$ to approximate $\int_0^2 5x^4\,dx$.

Solution Partition [0, 2] into four subintervals and evaluate $y = 5x^4$ at the partition points (Table 8.3). Then apply Simpson's Rule with $n = 4$ and $\Delta x = 1/2$:

$$S = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\frac{5}{16}\right) + 2(5) + 4\left(\frac{405}{16}\right) + 80\right)$$
$$= 32\frac{1}{12}.$$

This estimate differs from the exact value (32) by only 1/12, a percentage error of less than three-tenths of one percent, and this was with just four subintervals.

TABLE 8.3

x	$y = 5x^4$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$
1	5
$\frac{3}{2}$	$\frac{405}{16}$

الاسبوع العشرون

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يستخدم التوزيع التكراري في الاحصاء

الإحصاء

هو العلم الذي يبحث ويعالج المجموعات التي تتكون من مفردات كثيرة ويمنحنا الوسائل التي تساعد على جمع وتنظيم البيانات العينية لهذه المجموعات وتحليلها ومقارنتها بغيرها من المجموعات .

ولغرض تطبيق عملية الإحصاء علينا أن نتبع الخطوات التالية .

1) جمع المعلومات : - وتتضمن جمع البيانات والمعلومات الأولية التي نحصل عليها من المصادر الحكومية او باستفتاء او باختبار عينة من المعلومات بصورة عشوائية .

2) تنظيم البيانات :- وفيها يتم تنظيم البيانات بجداول إحصائية أو رسوم بيانية

3) معالجة البيانات :- والمقصود بالمعالجة هي تطبيق القوانين الإحصائية المناسبة لاستخراج نتائج عددية لها دلالة إحصائية كاستخراج المتوسطات أو الانحرافات وغيرها من الأمور الإحصائية .

4) التفسير والاستنتاج :-. وهذه المرحلة من أهم المراحل وتتطلب البداهة والأمانة وعدم التحيز والإلمام التام بالموضوع الذي يجري الإحصاء فيه مثل الذكاء أو الاستيراد أو التصدير وغيرها .

التوزيع التكراري Frequency Distribution

يتكون الجدول الخاص بعملية التوزيع التكراري من مجموعة من الأعمدة هي .

1) العمود الأول يحتوي على الفئات وهي فترات متساوية في القيم أو غير متساوية وتضم البيانات جميعا ويكون عدد الفئات لا يقل عن 6 ولا يزيد عن 15 فئة .

2) العمود الثاني يتكون من التكرارات والتي هي عبارة عن عدد البيانات الواقعة في كل فئة .

3) العمود الثالث يحتوي على مراكز الفئات والتي يساوي حاصل جمع حدي الفئة مقسوما على 2 .

4) العمود الرابع يحتوي على التكرار المتجمع الصاعد .

5) العمود الخامس يحتوي على التكرار المتجمع النازل .

مثال / ارسم جداول التوزيع التكراري لأوزان مجموعة من الصخور عددها (50) إذا كانت أوزانها مقدرة بالغرامات كالتالي .

690	460	920	760	680	750	830	700
780	450	490	570	630	590	510	610
720	890	650	910	800	530	430	940
740	640	540	440	350	950	750	850
760	750	550	570	650	560	390	720
480	490	360	380	400	530	610	710
810	900						

الحل /

1) نستخرج المدى (m) والذي يساوي الفرق بين اكبر عدد واصغر عدد في البيانات مضافا اليه (1) .

$M = (950 - 350) + 1 = 601$

أي انه يوجد 601 عدد يقع بين 350 و 950 على ان يكون العددان 350 و 950 من ضمنها .

2) نختار طول الفئة بحيث نحصل على عدد من الفئات لا يقل عن 6 ولا يزيد عن 15 , في هذا المثال نختار طول الفئة (L) يساوي (100). ثم نوجد عدد الفئات (N) وذلك بقسمة المدى على طول الفئة ونقرب الكسور إلى الواحد مهما كان الكسر .

$N = M/L = 601/100 = 6.01 = 7$ = (N إذن عدد الفئات)

3) نختار بداية الفئة الأولى وتكون عادة اصغر عدد في البيانات ثم نوزع بقية الفئات .

4) نسجل عدد البيانات الموجودة في كل فئة

5) نحسب التكرار المتجمع الصاعد التي يساوي مجموع تكرار الفئة مع التكرارات التي قبلها .

6) نحسب التكرار المتجمع النازل للفئة الأولى ويساوي مجموع التكرارات ثم بقية الفئات والتي يساوي مجموع التكرار مطروحا منه تكرار الفئة التي قبلها كما في الجدول التالي

الفئات	مراكز الفئات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
449 - 350	399.5	8	8	50
549 - 450	499.5	9	17	42
649 - 550	599.5	9	26	33
749 - 650	699.5	10	36	24
849 - 750	799.5	7	43	14
949 - 850	899.5	6	49	7
1049 - 950	999.5	1	50	1
مجموع التكرارات		50		

من الجدول نستطيع أن نحدد عدد الأوزان التي هي أكثر أو تساوي(550)والتي تساوي(33) أما عدد الأوزان التي تقل أو تساوي (649) والتي تساوي (26) .

مثال /2

ارسم جدول التوزيع التكراري لمجموعة عمال يشتغلون في حفر بئر للنفط عددهم (100) عامل تتراوح أعمارهم بين (18 - 50) سنة سجلت كالأتي

30	18	25	27	29	31	34	36	38	40
19	19	20	22	25	35	37	49	47	45
20	23	24	26	28	32	35	38	36	42
24	26	31	33	35	39	37	34	35	43
46	47	49	50	30	28	38	44	45	47
29	27	21	25	34	26	35	39	46	49
50	41	44	41	38	36	39	29	31	26
41	24	21	18	31	34	41	38	35	28
42	30	40	20	50	25	35	45	23	33
22	32	42	39	49	29	19	18	28	38

الحل /

المدى = $m = (50 - 18) + 1 = 32 + 1 = 33$

كما في الجدول $m = \frac{m}{l} = \frac{33}{5} = 6.6 \cong 7$ نختار طول الفئة وليكن (5) فإننا نحصل على 7 فئات

ألفئات	مراكز ألفئات	ألتكرار	ألتكرار المتجمع ألصاعد	ألتكرار المتجمع ألنازل
18 _ 22	20	13	13	100
23 _ 27	25	15	28	87
28 _ 32	30	17	45	72
33 _ 37	35	18	63	55
32 _ 42	40	19	82	37
43 _ 47	45	11	93	18
48 _ 52	50	7	100	1
		100		

من الجدول نستطيع أن نحدد عدد الأعمار التي هي أكثر أو تساوي(33)والتي تساوي(55) أما عدد الأوزان التي تقل أو تساوي (37) والتي تساوي (63) .

الاسبوع الحادي والعشرين

الاهداف

سيكون الطالب بعد نهاية الدرس قادر على أن:

1) يستخدم الوسط الحسابي

الوسط الحسابي (x^-) يعرف بأنه حاصل قسمة المجموع الجبري لمجموعة من الأعداد على عددها كما في المعادلة التالية

$$x^- = \frac{1}{n}[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots \dots \dots \dots \dots x_n] = \frac{1}{n}\sum_1^n x$$

وهناك معادلة ثانية لحساب الوسط لحسابي هي

$$x^- = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots \dots \dots \dots \dots x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots \dots \dots \dots \dots f_n} = \frac{\sum_1^n xf}{\sum_1^n f}$$

حيث $x =$ مركز الفئة , $f =$ التكرار للفئة

مثال / الجدول التكراري التالي يمثل اوزان العمال في معمل معين (40 عامل) المطلوب حساب معدل وزن العامل الواحد

kgالفئات (الأوزان)	xمراكز الفئات	fالتكرار(عدد العمال)	xf
49 - 45	47	4	188
54 - 50	52	10	520
59 - 55	57	11	627
64 - 60	62	6	372
69 - 65	67	6	402
74 - 70	72	2	144
79 - 75	77	1	077
المجموع		40	2330

$$x^{-} = \frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+\cdots\cdots x_nf_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots\cdots f_n} = \frac{\sum_1^n xf}{\sum_1^n f} = \frac{2330}{40} = 58.25 \quad kg$$

الطريقة الثالثة لحساب الوسط الحسابي باستخدام الوسط الحسابي الفرضي وكما يلي :-

الوسط الحسابي الفرضي $= A,$ $d = x - A$ $=$ حيث الانحراف $x^{-} = A + \frac{\sum_1^n d}{n}$

مثال / الجدول التكراري التالي يمثل مجموعة من الاعداد المطلوب حسب الوسط الحسابي لهذه الاعداد

x	d= x- A
190	- 60
232	- 18
250	0.0
295	45
304	54
المجموع	21

$$X^{-} = A + \frac{\sum d}{n} = 250 + \frac{21}{5} = 254.25$$

الطريقة الرابعة لحساب الوسط الحسابي باستخدام الوسط الحسابي الفرضي وكما يلي :-

$$x^{-} = A + \frac{\sum_1^n df}{\sum f}$$ حيث $F =$ التكرار ، الانحراف $= d = x - A$ ، $A =$ الوسط الحسابي الفرضي

مثال / الجدول التكراري التالي يمثل اطوال العمال في معمل معين(100 عامل) المطلوب حساب معدل طول العامل الواحد

الفئات (الأطوال)	التكرار(F)
160 - 162	5
163 - 165	18
166 - 168	42
169 - 171	27
172 - 174	8

الحل/نوجد مراكز الفئات و نختار $A = 167$ ونحسب قيمة df ونرسم الجدول

$$x^{-} = A + \frac{\sum_1^n df}{\sum f} = 167 + \frac{45}{100} = 167.45 \ cm$$

الفئات (الاطوال)	التكرار(F)	مراكز الفئات(X)	d = x - A	df
160 - 162	5	161	- 6	- 30
163 - 165	18	164	- 3	- 54
166 - 168	42	167	0.0	0.0
169 - 171	27	170	3	81
172 - 174	8	173	6	48
المجموع	100			45